DE
Principiis & Ratiocinatione
GEOMETRARUM.

Ubi oſtenditur incertitudinem fal-ſitatemq; non minorem ineſſe ſcriptis eorum, quam ſcriptis Phyſicorum & Ethicorum.

Contra faſtum Profeſſorum Geometriæ.

LONDINI,
Apud *Andream Crooke* in Cœmiterio *D. Pauli* ſub ſigno Draconis viridis. 1666.

Ad Illustrissimum Dominum D. Henricum Bennet Baronem de Arlington, Serenissimo Regi Carolo II. a Consiliis, & Secretarium primarium.

CUm senectutis meæ solatium maximum tuæ (Illustrissime Domine) opi debeam, ingratus essem nisi tantæ gratiæ vestigium aliquod etsi obscurum extare curarem. Quod cum alia non possum, vulgata via Scholarium facio, Dedico tibi libellum, non male moratum, sed tamen audaculum; Geometrarum enim totam invadit nationem. Quid (inquies) si injustè? Mihi quidem id dedecus magnum

esset, sed quod ad te, qui ad altiora institutus es, quemq; morum & officii mei erga teipsum, non nugarum mearum inspectorem facio, non pertinebit. In magno quidem periculo versari video existimationem meam, qui a Geometris fere omnibus dissentio. Eorum enim qui de iisdem rebus mecum aliquid ediderunt, aut solus insanio ego aut solus, non insanio; tertium enim non est, nisi (quod dicet forte aliquis) insaniamus omnes. Cæterùm sine Iudice lis est, nisi quòd Iudicem aliquando seipsam constituet nondum imbuta posteritas. Videri tibi interea vir bonus, etsi pessimus Geometra, satis habeo. Deum precor ut te optimo Regi, ministrum optimum diutissime conservare velit.

Servorum tuorum humillimus,

Tho. Hobbes.

ERRATA.

PAg. 31. l. 9. pro *duplæ*, lege *dupla:* l. 10. pro *duplicatæ*, lege *duplicata*. pag. 42. l. 31. dele *in:* pag. 49. l. 3. pro *ſibi* lege *tibi:* pag. 55. l. 12. pro *arcuum* lege *arcum:* l. 21. pro 4. lege 47. pag. 58. l. 23. pro 4000. lege 400. pag. 59. l. 18. pro 4. lege 47. pag. 60. l. 6. pro *CN*, lege *BN:* l. 7. pro *BNgk*, lege *BNgh*.

Contra Geometras.

CОntra Geometras (amice Lector) non contra Geometriam hæc ſcribo. Artem ipſam, artium Navigandi, Ædificandi, Pingendi, Computandi, & denique (ſcientiæ omnium nobiliſſimæ) Phyſicæ matrem, æquè ac qui maximè, laudibus extollendam cenſeo.

Cæterùm ubi Geometræ Encomiis artis quam profitentur (imperitè an aſtutè neſcio) ſuas ipſorum laudes immiſcent, licitum mihi (puto) erit, diſtinguere. Quomodo autem Scientiam hanc laudare ſoleant Magiſtri ejus, ex uno *Clavio* intelligere poſſumus, laudante illam in Prolegomenis ad *Euclidem*, hoc modo.

Si vero Nobilitas atq; præſtantia Scientiæ ex certitudine demonſtrationum quibus utitur, ſit judicanda; haud dubiò Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem firmiſſimis rationibus, confirmantq;, ita ut verè ſcientiam in auditoris animo gignant, omnemq; prorſus dubitationem tollant: Id quod aliis ſcientiis vix tribuere, &c. Et paulo infrà:

Diſciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetunt, adamant, excoluntque, ut non ſolum nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantum probabile exiſtit, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirmant.

Quibus verbis (quia *Sciens*, non *Scientia* demonſtrat) non artem ipſam, ſed magiſtros laudat: Certitudo Scientiarum omnium æqualis eſt, alioqui enim Scientiæ non eſſent, cum Scire non ſuſcipiat magis & minus. Phyſica, Ethica, Politica ſi bene demonſtratæ eſſent non minus certæ eſſent quam Pronunciata Mathematica, ſicut nec Mathematica Scientiis aliis certior eſſet, niſi rectè demonſtrarentur ea quæ pronuntiat.

Itaq; per hanc Epiſtolam hoc ago, ut oſtendam tibi non minorem eſſe dubitandi cauſam in Scriptis Mathematicorum quam in Scriptis Phyſicorum, Ethicorum, &c.

Omitto inter Geometras diſſentiones & mutua convitia, quæ ſignum certiſſimum Ignorantiæ ſunt. Ipſa aggredior Principia, & interdum etiam Demonſtrationes. Sive enim Principia falſa ſint, ſive illatio neceſſaria non ſit, demonſtratio nulla eſt. Pro Geometris autem omnibus oppugnabo *Euclidem*, qui omnium Geometrarum Magiſter exiſtimatur, & interpretem ejus omnium optimum *Clavium*.

Itaq; primo loco examinabo *Euclidis* Principia: ſecundo, ea quæ principiis illis innitentia videntur mihi eſſe falſa; ſive ea ſint *Euclidis*, ſive *Clavii*, ſive cujuſcunque Geometræ, qui Principiis illis, vel aliis falſis uſi ſunt; atq; ita oppugnabo ut meliora rejectis ſubſtituam, ne artem ipſam videar labefactare velle.

Cap. I.

De Puncto.

Definitio *Euclidis* prima, *Puncti* eſt, hæc! *Punctum* (Σημεῖον) *eſt, cujus pars nulla eſt.*

Quid Definitione hac intellexit *Euclides* difficile eſt ſcire. Signum enim, quatenus Signum, Nomen Quanti non eſt, ſed Relationis, quanquam quicquid ſit quod in Signum alicujus rei ſtatuas viſibile, neceſſariò corpus ſit, & proinde Quantum etiam & Diviſibile eſt, & partem habere poteſt. Etiam verba illa *cujus pars eſt nulla*, dupliciter intelligi poſſunt, aut pro

Indiviſo (Pars enim non intelligitur, niſi ubi præceſſerit diviſio) vel pro Indiviſibili, quod per naturam ſuam diviſionis eſt incapax. In priori ſenſu Punctum quantitas rectè dicitur; in poſteriore non item; cum omnis quantitas diviſibilis ſit in ſemper diviſibilia. Itaque ſi punctum ſit indiviſibile, carebit Linea omni latitudine; &,quia nihil eſt longum quod non habeat latitudinem, erit linea planè Nihil. Quanquam enim Longitudo Lata non ſit, Longum tamen omne Latum eſt. Videtur etiam *Euclidem* ipſum in ea opinione fuiſſe, Punctum quanquam partem actu non habeat, potentia tamen diviſibile eſſe, & quantitatem; alioqui non poſtulaſſet a *puncto* ad *punctum* duci poſſe Lineam rectam. Quod impoſſibile eſt, niſi Linea habeat latitudinem aliquam. Verum ſive ita ſenſerit *Euclides*, ſive aliter; manifeſtum eſt Punctum diviſibile eſſe ex eo, quod ſectâ Lineâ in duas partes, habebit utraque pars duos Terminos, id eſt duo Puncta extrema, & per conſequens Punctum Dividens ſecatur (ſi quantitas ſit) in duas quantitates; ſi nihil ſit, in duo nihila. Etiam circulus ſecari poteſt in Sectores quotcunque, & proinde (cum omnis Sector deſinat in Punctum) ſecabitur quoque Centrum in totidem Puncta, partes totidem Centri; ſive Centrum illud quantitas ſit, ſive Nihil.

Definitio ergo *Puncti* apud *Euclidem*, quemadmodum eam intelligunt Geometræ poſt *Euclidem* omnes, vitioſa eſt. Quam tamen ſi nullum in Geometria errorem peperiſſet, præteriiſſem.

Definitio *Puncti* vera, & quæ vitium nullum in demonſtrationes illatura ſit, talis eſſe debet; *Punctum eſt diviſibile quidem, ſed cujus pars nulla in Demonſtratione conſideranda eſt*, id eſt conſiderandum eſt, non ut Punctum (quod Græcè νυγμὴ dicitur) neque ut στιγμὴ (quæ Græcê eſt diſtinctio viſibilis) quæ ambo Quanta ſunt; ſed ut Signum (quod Græcè eſt Σημεῖον, quo verbo utitur *Euclides*). Signum enim, quanti nomen non eſt.

Eſt enim *Geometria*, *ſcientia qua ex aliqua vel aliquibus menſuratis per ratiocinationem determinamus quantitates alias non menſuratas*. Rectè igitur incepit *Euclides* a definitione *Menſuræ*,

sura, qua mensurantur longitudines, & primo loco *mensura* illius terminum definiit, & *Signum* esse dixit. Sed cujus rei Signum? Signum a quo Mensuræ terminus unus aut alter mensurato applicatur.

Præterea si *Punctum* indivisibile esset, id est Non-quantum, id est nihil, sequeretur (supposito, ut nunc supponunt scriptores Mathematici, quantitatem dividi in infinitum, ut punctum sit pars lineæ infinitè exigua) partem infinitè exiguam lineæ rectæ, & quadratum quod sit minima pars Quadrati, & Cubum qui sit minima pars Cubi, esse inter se æqualia.

Cap. II.

De Linea.

Lineam definit *Euclides Longitudinem esse, sine Latitudine*. Scilicet conformatur hæc ad Definitionem puncti, & propterea eadem omnia habet vitia. Nam ut Centrum circuli dividitur a sectoribus in partes quotlibet, ita etiam sectorum latera dividuntur secundum Latitudinem. Nam si Sector quilibet dividatur in duos sectores, quorum unus apud te esset, alter apud me, haberet uterque duo latera & propterea sive Latus illud medium habeat Latitudinem, sive non-Latitudinem, erit divisum in duas superficies vel in duas non-superficies. Itaque omni modo linea est divisibilis.

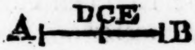
Linea ab aliis definitur *Puncti moti vestigium*, sive Via. De qua definitione *Clavius* sic loquitur. *Mathematici quoq; ut nobis inculcent veram Lineæ intelligentiam, imaginantur Punctum jam descriptum superiori definitione, e loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex eo motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers Latitudinis.* Vide Mathematicorum, qui subtiliores multo sunt, quam qui operam dederunt studiis cæterarum artium, *Clavium* subtilissimum, scribentem, hoc loco, *vestigium relinqui longum a motu ejus quod nullum habet Latitudinem*, id est a motu Nihili. Sciunt tamen omnes, nihil moveri præter corpus, neq; motum concipi nisi

nisi corporis posse. Sed corpus omne motum, vestigium relinquit non modo longum, sed etiam latum. Definitio igitur lineæ debebat esse hujusmodi. *Linea est vestigium quod relinquitur a motu corporis, cujus quantitas non consideratur in demonstratione.*

Cap. III.

De Termino.

DEfiniuntur tertio loco, Lineæ Termini, hoc modo. *Lineæ Termini sunt Puncta.* Quam definitionem non reprehendo; sed ut ab ea, id quod antè dixi, nimirum Punctum non esse indivisibile, sed tantum in demonstratione non ut divisum considerari, inde ostendam. Si enim Linea secetur in Puncto bifariam, cum utraq; habeat duos Terminos, sitq; Punctum illud, in quo dividitur Linea, omnino nihil, duæ partes a divisione factæ se mutuò tantùm tangerent nec haberent ullum Punctum commune. Et proinde Terminus extremus magis distabit a Termino alterius Lineæ ad quod est Punctum dividens, quam a sui ipsius Termino altero ad quem itidem ponitur idem Punctum dividens, id est, major est una partium quam altera, & proinde Linea illa divisa non est bifariam ut supponebatur. Exempli gratia. Lineâ A B sectâ bifariam in C, partes ejus se tangunt tantum ad C, & earum cujusque Termini (cum sint duæ Lineæ) sunt omnes quatuor; quare ad C erunt duo Termini, qui sint D et E, & per consequens, BD major est quam AC; non est ergo AB divisa bifariam in C nisi D, C, E considerentur ut idem Punctum.



Cap.

Cap. IV.

De Linea Recta.

DEfinitio quarta eſt, *Lineæ rectæ, talis. Linea recta eſt quæ ex æquo ſua interjacet Puncta.* Id eſt (interprete *Clavio*) In qua nullum Punctum intermedium ab extremis ſurſum aut deorſum, huc vel illuc deflectendo ſubſultat, in qua deniq; nihil flexuoſum reperitur. Non agnoſco hic orationem Mathematicorum. Quomodo Punctum ſubſultet ſurſum & deorſum, huc & illuc non intelligo, non tamen credo quemquam eſſe qui rem ipſam, Lineam (inquam) rectam animo ſuo non ſatis rectè concipiat, ideâ nata ab aliqua Linea recta materiali, quanquam ideas ſuas, non omnes homines poſſunt oratione æquè declarare. Sed neq; contra, illi qui cogitata ſua optimè deſcribunt, ſunt ſemper optimi Mathematici. Definire enim vocabula Artis cujuſcunq; non eſt ipſius Artis, neq; forte omnino artis opus, ſed partim Judicii Naturalis, quo diſtinguitur inter cujuſq; rei Eſſentialia, & non Eſſentialia, partim Ingenii ad inveniendum verba & orationem prompti, quibus ea quæ Eſſentialia ſunt propriè & adæquatè ſignificentur. Itaq; diverſi homines eandem habentes ideam Lineæ Rectæ, non tamen eandem ejus definitionem aſſignaverunt. Indicat nobis hoc loco *Clavius* plurium doctorum hominum, *Lineæ Rectæ* definitiones. Primo loco *Procli*, nempe, Recta eſt quæ tantum præciſè occupat ſpatium, quanta eſt diſtantia inter Puncta ejus extrema. Secundo, *Platonis*, Recta eſt cujus intermedia Puncta obumbrant extrema. 3°. *Archimedis*, Recta eſt minima habentium terminos eoſdem. 4°. *Campani*, Recta eſt breviſſima a puncto ad punctum extenſio. 5°. Eorum qui dicunt, Rectam eſſe quæ deſcribitur a Puncto moto nec vacillante. Quibus ego addo aliam Authoris recentioris, Recta eſt cujus termini, ſalva quantitate, diduci non poſſunt.

Quarum definitionum quænam ſit cæteris præferenda, ex duabus rebus judicandum eſt, Idea, & Uſu. Ex Idea an vera ſit; ex Uſu, an Principium Demonſtrandi Idoneum ſit. Idea

juxta quam definita eſt a *Platone* Linea recta, Imago erat projectæ ab ea Umbræ, quam quidem projici vidit per rectam. Itaq; quid ſit Recta ſatis conceperat; ſed definitio illa planè ſterilis eſt, nec ullius uſus ad demonſtrandum utrum Linea de qua quæritur, recta ſit necne, neq; ad demonſtrandam rationem rectæ ad curvam. *Procli*, *Archimedis*, & *Campani* definitiones verbis quidem differunt, idem autem ſignificant, nempe Rectam eſſe, quæ inter eoſdem terminos eſt breviſſima, quæ orta eſt ab Idea viſarum plurium Linearum conterminarum, quarum unica viſa eſt recta & breviſſima. Atq; hac definitione utitur *Archimedes*. Quis enim qui conceperit in Sphæra plures circulos Meridianos & Axem unicum, non judicabit Axem tum rectam eſſe Lineam tum breviſſimam aliarum omnium quæ tranſeunt a Polo ad Polum. Idea unde nata videtur eſſe definitio ultima erat quod videret Extenſionem nihil aliud eſſe præter diductionem extremorum Punctorum; contraq; Incurvationem nihil aliud eſſe quam adductionem terminorum eorundem. Quod Rectam definiunt *Veſtigium Puncti moti nec vacillantis* a nulla Idea ortum eſt, nec oriri potuit; quia vacillare nihil dici poteſt, niſi reſpectivè ad Veſtigium Lineæ jam antè ductæ. Neq; videtur magis vacillare Punctum dum deſcribit circumferentiam circuli, quam dum deſcribit Lineam rectam.

At definitio *Euclidis* omnino eſt inſignificans. Quis enim intelligat quo modo Puncta media Lineæ, ex æquo jacent inter extrema?

Quo argumento oſtenſum eſt Punctum non eſſe ſua natura, ſed ſolummodo ut conſideratum in demonſtrationibus, indiviſibile, eodem demonſtrari poteſt, Lineam non eſſe ſua natura ſine Latitudine, ſed ſolummodo quatenus conſiderata eſt inter demonſtrandum.

Cap.

Cap. V.

De Superficie.

DEfinitio quinta, *Superficies est quæ Longitudinem Latitudinemq; habet*, iisdem omnibus laborat vitiis cum definitione Lineæ; cum (exempli gratiâ) bases duorum hemisphæriorum duæ sunt, sive hemisphæriorum illorum alterum sit apud Indos Orientales, alterum apud Occidentales, sive se mutuò contingant. Dividitur ergo unà cum Spherâ etiam maximus ejus circulus, id est dividitur secundum Profunditatem. Profunda ergo est superficies quæ basis est hemisphærii.

Cap. VI.

De Superficiei Terminis.

DEfinitio sexta, *Superficiei Termini sunt Lineæ*, probat (divisa Superficie) duos ejus Terminos, id est duas Lineas esse extremas utriusq; partis, & (per consequens) Lineam dividi posse bifariam ab uno ejus extremo ad alterum.

Cap. VII.

De Superficie Plana.

DEfinitio septima est, *Plana Superficies est, quæ ex æquo interjacet suas Lineas*, quam *Clavius* exponens oratione nihil significante, simili ejus qua usus est in explicanda definitione Lineæ Rectæ, *Plana* (inquit) *est Superficies, in qua partes omnes in rectum collocatæ sunt, ita ut nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum.* Quæ verba ab omni arte aliena, ne ipse quidem potuit intelligere. Quod autem partes Plani omnes in rectum collocatas esse dicat,

cat, impossibile est nisi Planum totum sit una Linea Recta; quod item Superficiem Planam talem esse dicit qualis est Superficies perpoliti alicujus marmoris, verum non est, nisi Conus aut Sphæra marmorea non potest perpoliri æquè ac Superficies Plana. Rem quidem ipsam & *Euclides*, & *Clavius* & omnes homines satis rectè concipiunt, sed quæ Superficiei Planæ essentialia sunt, verbis explicare, saltem facile, non omnes possunt. Si Superficiem Planam esse dixeris, quæ describitur a Linea ita mota, ut singula ejus Puncta rectas Lineas describant, rectè eam definieris, & clarè, & Essentiæ ipsius consentaneè.

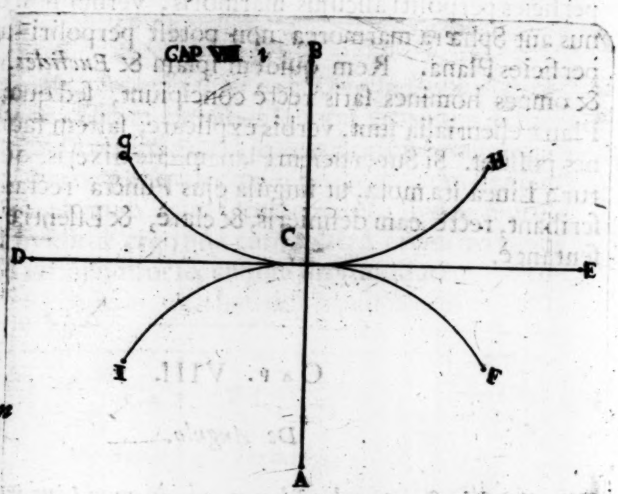
Cap. VIII.

De Angulo.

Definitio 8. *Angulus Planus, est duarum Linearum in Plano se mutuò Tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.* Ideam sive imaginem Anguli, de quo tam multa dicuntur a Geometris, impressam animo, pauci habent. Quicquid maxima ex parte in Superficie late patens, desinit in angustum, dicitur vulgò Angulus. Talem Ideam Anguli, etiam *Euclides* a conspectis duabus Lineis concurrentibus conceptam, videtur voluisse hoc loco verbis declarare; neq; (ut videtur) omnino cogitaverat aut audiverat quicquam de Angulo Contactus. Quanquam enim El. 3°. Prop. 16. Conatur demonstrare Angulum factum a Tangente & circumferentia Circuli, minorem esse omni angulo acuto, nusquam tamen nominat Angulum Contactus, neq; de illo, sub alio quovis nomine, quicquam dicit. Itaq; non videtur voluisse comprehendere hac definitione Angulum Planum ullum, qui non fuerit ejusdem generis cum angulo Rectilineo. Quod etiam ex eo colligi potest quod ad anguli definitionem, necessariam putaverit esse conditionem, ne *Lineæ quæ angulum efficiunt jaceant in directum.* Verum quid voluisse

luisse videtur *Euclides*, conjicere frustrà erit, Ipsam Definionem verbatim consideremus.

Quod ut melius faciamus (cum sit res satis magni Mathematicis momenti, quæque magnas inter *Clavium* & *Pelletarium* contentiones excitavit) rem totam descripta figura ponamus ante oculos.



Sit recta AB divisa bifariam in C, & Radiis AC, BC describantur duo circuli FI, GH; seceтq; recta ED rectam AB ad angulos rectos in C.

Videamus primò, quænam sint duæ Lineæ quæ angulum constituunt; & quæ duæ angulum non constituunt. Rectæ DC, CE absq; dubio constituunt compositæ, unam rectam DE. Sed an item rectæ AC, CE constituant unam Lineam curvam incertum est; imò verò certum potius quod non. Nam punctum C considerabitur vel ut Quantum, vel ut Nihil. Si ut Nihil neq; Linea DE, neq; Linea FI duci potest, neq; considerari. Sin punctum consideretur ut quantum, considerabitur recta quidem DE ut rectangulum, & arcus FI ut orbis, alicujus latitudinis. Itaq; punctum C considerabitur ut pars utriusq; communis; & sic erit idem punctum consideratum ut majus & minus, id est ut quadratum, & circulus ipsi inscriptus. Quare duæ rectæ constituentes

ſtituentes angulum rectum nullo modo conſiderari ut una recta poſſunt. Multo autem minus, ſi conſtituunt angulum acutum. Quid ergo (inquiet forte aliquis) nullâne neq; arte, neq; fortuna dividi poteſt Linea recta in partes aliquotas? Punctum enim ſi nihil ſit, nuſquam eſt, neq; in mediâ Lineâ, neq; in tertia, neq; in quarta parte ejus. Sin punctum ſit quantum, auferetur per diviſionem aliqua pars rectæ dividendæ. Ad quod reſpondeo. Rectè dividetur recta, ſi ſecemus eam per Lineam habentem exiguam aliquam latitudinem, ita ut partes utrinq; ſint æquales, dicamuſq; totius rectæ ſecandæ medietatem eſſe ad mediam latitudinis Lineæ ſecantis. Accuratiùs autem dividi biſariam (ab humana ſaltem potentia) non poteſt. Itaq; hæc verba *duarum Linearum, &c.* ut obſcura reprehendo, propterea quod, quæ duæ lineæ, unam conſtituant vel non conſtituant, nondum docuerat.

Id quod facit duas Lineas compoſitas rectè vocari *unam*, eſt quod idem omnino habeant punctum commune, quale quidem habent arcus F C, C I; ſed non item F C, C D, neq; E C, C A.

Videamus ſecundò quænam ſint Lineæ quæ ad faciendum angulum debent ſe *mutuò tantum tangere*, Et (quoniam locum hunc exponens *Clavius* angulum effici dicit ex hujuſmodi *concurſu* ſeu *inclinatione*) quid ſit duarum Linearum in plano concurſus. *Etiam quid ſit jacere in directum.* Quid etiam ſit *inclinatio*, quam *Clavius* eandem rem eſſe putavit cum concurſu. Et quid ſit *Lineam a Linea ſecari.*

Recta arcum (ſive aliam Lineam curvam) *tangit tantum*, quando tangit quidem, tota tamen eſt extra circulum, ut nullum ſit utriuſq; commune punctum. Ut qui alicujus domus januam *tangit tantum*, is neq; intra domum eſt, neque in ipſa janua, ſed totus extra.

Concurrunt autem duæ Lineæ quando utriuſq; eſt aliquod commune punctum, necdum producitur ulterius.

Recta deniq; arcum ſecat quando pars rectæ eſt intra, pars extra circulum. Non eſt ergo eadem res contactus & concurſus; neq; quæ ſe pluſquam tangunt neceſſariò ſe mutuo

 ſecant,

secant, neq; rectè interpretatus est hoc loco *Euclidem Clavius.*

Tertiò, videamus quid sit *jacere in directum.* Verba illa *jacere in directum* quem locum in Lineis non rectis habere possunt non intelligo; nam si *vera* sunt, juxta interpretationem *Clavii*, qui dicit duos arcus F C, C I *jacere in directum* etiam duæ semisses ejusdem circuli jacebunt in directum, & (quod inde sequitur) puncta omnia totius perimetri, *jacebunt* in directum & punctum potest moveri a loco suo donec ad eundem locum redeat motu directo, & fiat perimeter recta Linea.

Videamus quartò, quid sit *Inclinatio.* Quando recta rectæ ad angulos rectos insistit, non dicitur (juxta sermonem communem) omnino inclinari in utramvis partem rectæ cui insistit: Quando autem altera alteri insistit ad angulos obliquos tunc *inclinari* ad eam partem dicitur ubi angulus est acutus. Atq; hoc sensu *Inclinationem* intelligit in Elemento undecimo *Euclides.* Itaq; minima *Inclinatio* rectæ C B ad C D tunc est, quando altera ad alteram est perpendicularis; maxima autem quando admovetur C B ad C D motu circulari ita ut ambæ coincidant. Idem etiam dici potest de *Inclinatione* rectæ C D ad C A, & rectæ C A ad C E, & rectæ C E ad C B. Motus enim circularis cujuslibet e quatuor rectis ad rectos angulos deinceps collocatis *Inclinationem* mensurat, adeoq; angulos eo motu generatos, & semper quo major est pars totius circuitionis quæ eo motu circulari conficitur, eo major est angulus.

Jam *Inclinatio* rectæ C D ad arcum C I quo pacto mensurari potest, cum partes omnes arcus C I diversas habeant inclinationes, nisi quod in puncto unico C *Inclinatio* maxima est, nempe puncti C quatenus in recta D C ad idem punctum C, quatenus in arcu I C. Itaq; angulus qui fit a curva C I & recta C D, omnino ad punctum ipsum C nullus est, nisi angulus contactus non sit ejusdem generis quantitatis cum angulo quem efficit Radius per motum circularem ad alium locum translatus. De quo fusiùs dicetur in examinatione Propositionis 16æ Elementi tertii.

Videamus

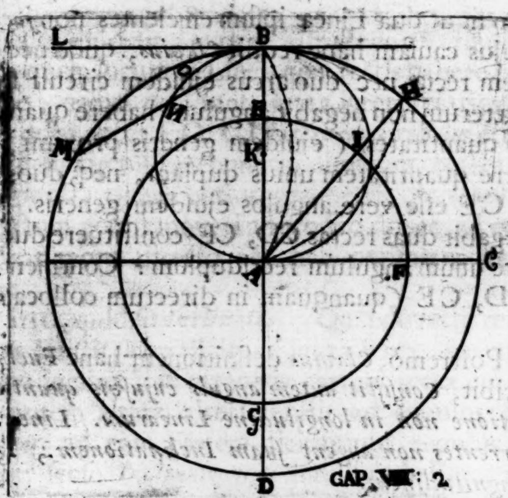
Videamus deniq; cur ad constitutionem Anguli, necessarium sit ut duæ Lineæ ipsum efficientes non *jaceant in directum*, cujus causam hanc reddit *Clavius*, quod nec duæ partes ejusdem rectæ, nec duo arcus ejusdem circuli faciunt angulum. Cæterum non negabit angulum habere quantitatem, neq; duas quantitates (ejusdem generis proximi) compositas habere quantitatem unius duplam, neq; duos angulos A C D, A C E esse vere angulos ejusdem generis. Quomodo ergo negabit duas rectas CD, CE constituere duos angulos rectos, sive unum angulum rectiduplum? Continent ergo duæ rectæ CD, CE (quanquam in directum collocatæ sint) angulum.

Postremò, *Clavius* definitionem hanc *Euclidis* exponens sic scribit, *Consistit autem anguli cujusvis quantitas in sola Inclinatione non in longitudine Linearum. Lineæ enim longius excurrentes non augent suam Inclinationem; igitur neq; anguli magnitudinem.*

Quid ergo opus est omnino ad essentiam anguli lineis; quæ minui possunt ambæ in infinitum, salva quantitate & natura anguli? Etiam in angulo contactus, si minuatur arcus I C quantum fieri potest, quænam erit differentia inter angulos D C C & D C D? Scire hinc potes an accuratiores, acutioresvè sint Mathematici quam aliarum artium studiosi. Restat ut anguli plani naturam explicem, & inter angulum contactus, & angulum ex circulatione distinguam; & utramq; definiam si potero clariùs, accuratiùs, & ad usum Geometricum accommodatiùs.

Centro A, motu Radii A B describantur duo circuli BCD, E F G (neq; refert utrum A B sit recta an curva, quales sunt curvæ punctis signatæ A B, A H; nam easdem describunt tum Superficies tum Lineas.) Et a centro ad circumferentiam ducatur recta A H utcunq;, secans circulum E F G in I. Facit ergo A B, per motum circularem ad A H, angulum B A H, & pergens ad C facit angulum majorem ejusdem generis. Appellabimus autem hoc genus anguli *angulum genitum*

nitum ex circulatione sive motu circulari Radii. Itaq; Ideam anguli hujus generis perfectam habes. Cœterum ad definitionem ejus legitimam, investiganda prius ea sunt, quæ ipsi sunt essentialia.



CAP. VIII: 2.

Primum est, ut sit quantum. Hoc autem manifestum est ex eo quod alter altero major esse potest; ut angulus B A C major est angulo B A H.

Secundò, quia anguli B A H, E A I æquales sunt, sed neq; rectæ A B, A E, neq; plana B A H, E A I, æqualia sunt, certum est, Quod essentia anguli non consistit neq; in quantitate Linearum quibus, includitur neq; in quantitate Superficierum BAH, EAI; neq; deniq; consistit essentia anguli in magnitudine arcuum B H, E I, cum anguli ipsi æquales sint, arcus æquales non sint.

Ubi ergo inveniemus æqualitatem illam propter quam æquales dicuntur duo anguli B A H, E A I?

Duo anguli B A H, E A I æquales vocantur, propterea quod æquales sunt partes, sive potius, eadem pars totius circumlationis Radii. Sunt enim duo arcus B H, & E I facti à motu Radii (sive recti sive curvi) A B eodem tempore. Itaq; æqualitas angulorum hujus generis consistit in æqualitate partium temporis in quo circulatio tota Radii perficitur. Atq; hinc est, nec aliunde, quod tum Anguli, tum Sectores in eodem circulo sumpti, sunt in eadem ratione cum suis arcubus.

Habeo ergo naturam *anguli ex circulatione geniti*, nempe eandem

eandem cum natura circulationis. Et angulus ipsa est pars circulationis totius. Et arcus & anguli sui eadem est quantitas. Nomen autem anguli, arcui datum est propter lineas quæ ductæ a centro ad circumferentiam faciunt ut Angulus conspiciatur. Neq; sunt illæ Lineæ rectæ de Essentia anguli, qui sine illis determinatur in arcu, quanquam Essentiales sint figuris angulatis, ut triangulis, quadratis, *&c.*

Ex his quæ dicta sunt de natura Anguli brevis & clara emergit Anguli hujus generis definitio hæc, *Angulus est circuitionis* (sive circumlationis) Radii dum circulum vel partem circuli describit, quantitas. *Dicere enim quod sit inclinatio Linearum*, aniculæ potius est sedentis ad angulum *Camini*, quam Mathematici, ejusdemq; accurati & rigidi.

Mensuram autem hujus generis angulorum agnoscunt omnes esse arcum circuli; agnoscunt item Mensuram & Mensuratum esse in eodem genere quantitatis. Idem ergo est quantitatis genus, Arcus & Angulus.

Consideremus jam naturam *anguli contactus*. Divisa A B. bifariam in K, Radio K B describatur Semicirculus B A; ducaturq; recta B L magnitudinis indefinitæ, sed parallela A F, quæ propterea tanget circulos B A & B D in puncto B. Supponamus *rectam aliquam*, ut B L æqualem arcui B A, impossibile enim non est. Supponamus etiam B L in omni ejus puncto æqualiter flecti, sive incurvari, ita ut coincidat cum arcu B A; neq; enim hoc est impossibile, quia ut arcus extensione fieri potest Linea recta, ita recta per flexionem converti potest in arcum circuli. Habemus ergo duos arcus B A, B D æqualiter curvos, quanquam magnitudine inæquales. Deinde si a puncto B ducatur recta B M secans utrumq; semicirculum, majorem in M, minorem in N, erunt quoq; arcus B M, B N æqualiter curvæ (cum sint in eadem ratione cum suis circulis integris.) Quanquam arcus B M major sit quam B N.

Præterea, in eodem circulo, quo minor est arcus, eo minorem habet curvitatem; in ratione ipsorum arcuum, qui in omni puncto æqualiter flectuntur, sive incurvantur.

Postremò, natura Anguli quem faciunt duo arcus B A, B C

non

non consistit in quantitate Superficiei quam continent; nam Anguli quantitas determinata, Superficies illa indeterminata est; similiter neq; consistit natura Anguli quem faciunt recta B L cum arcu B M in Superficie indefinita, cui illæ duæ lineæ utrinq; adstant.

In quo ergo (inquies) consistit natura Anguli contactus duorum arcuum, vel arcus & rectæ? In eo, quod Angulus ille determinat quantitatem curvitatis; ut ex modo dictis apertè constat. Nam cum duo arcus B D, B A sint æquè curvi, erunt etiam arcus B M, B N (qui sunt ut arcus B D ad arcum B A) æquè curvi. Et quia arcus B M duplo curvior est sua semisse, puta arcui B O, erit quoq; arcus B N duplo curvior quam est idem arcus B O sibi æqualis. Atq; idem omnino continget in omni alia proportione arcus exterioris ad interiorem.

Itaq; arcus illi qui Angulum contactus dicuntur efficere, aliud non sunt (quoniam curvitas major, vel minor, vel æqualis, alteri curvitati esse potest) quam quantitas curvedinis circumferentiæ. Itaq; Angulum contactus, (quem, angulum dici volunt Geometræ) sic definio. *Angulus contactus est quantitas curvitatis quæ est in arcu circuli facta a continua & uniformi flexione lineæ rectæ.*

Sequitur hinc, in puncto primo rectæ B L, nempe puncto B, ubi nulla intelligi potest flexio, nullam esse curvitatem, & proinde rectam B D cum arcu B M in puncto B constituere angulum rectum. Fatetur enim *Clavius* longitudines linearum nil mutare in magnitudine Anguli; nec ideo angulum contactus quicquam detrahere a magnitudine Anguli recti rectilinei D B L.

Sequitur etiam Angulum contactus non esse ejusdem generis cum angulo rectilineo (quod & *Clavius* fatetur) cum curvitates arcuum æquales esse possunt tunc quando arcus ipsi sunt inæquales. Hæc tibi satis perspicuè puto explicavi. Sin argumenta *Clavii* contra *Pelletarium* assensum tuum etiam nunc impediant, tollam ea cum istuc venero.

Cap. IX.

De Figura.

Definitio 13. nempe, *Terminus est quod alicujus extremum est*, sera venit; cum in 3ª & 6ª definiisset terminos Lineæ, & Superficiei esse Puncta.

Definitio 14. *Figura est quæ aliquo vel aliquibus Terminis comprehenditur.* Quæro hic primo, ad quam Vocem expressam vel subauditam refertur Vox Relativa *quæ*. Si refertur ad figuram, definitio erit (*Figura est figura quæ aliquo*, &c.) vitiosa. Sin ad Vocem *magnitudo*, tum definitio talis erit, *Figura est magnitudo quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur*; vel brevius, *Figura est magnitudo undiquaq; finita.* Quæ quidem definitio est legitima. Sed quomodo excludet ab hac definitione *Clavius* Finitam Lineam? Dicet fortasse, Lineam quæ *longitudo tantùm est* Terminos alios non habere præterquam longitudinis, & propterea Figuram non esse. Quomodo ergo differunt inter se duæ Lineæ Finitæ inæquales quarum altera recta altera curva est, si non Figura? differunt enim plusquam longitudine.

Definitio 15. *Circulus est Figura plana sub una Linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, in quam ab uno puncto eorum quæ intra Figuram sunt posita cadentes omnes rectæ Lineæ inter se sunt æquales.* Quam non reprehendo, sed quæro, primo, quare latera omnia simul quæ constituunt ambitum Polygoni, non æquè una Linea sunt ac perimeter Circuli, qui Circulus Polygonum censeri potest laterum numero infinitorum? Si dicant differentiam consistere in eo quod duo latera Polygoni non habent punctum commune ad eos quos faciunt angulos, sicut habent duo quilibet arcus circuli, acquiescam. Cæterum si ita dicant, videant an ἀκρίβειαν illam propositionis 47. Elementi primi non tollant, cui maxima pars Geometriæ innititur. Quæro secundo, cur non definivit Circulum a circumductione Radii, ut definivit Sphæram a circumductione Semicirculi; nam potuit; & fuisset definitio illa declaratio

generationis circuli, & per illam hæc definitio demonſtrari breviter potuiſſet. In his igitur definitionibus reprehendo τὴν σκαιότητα.

Definitio 34. *Parallelæ rectæ Lineæ ſunt quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraq; parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuò incident*, vera quidem eſt Propoſitio, non autem bona Definitio. Bona Definitio ingenerare debet auditoris animo Ideam Parallelisſmi, id eſt, Æquidiſtantiæ. At in hac definitione, ne una quidem vox eſt quæ ſignificat aut æqualitatem aut duarum rectarum diſtantiam. Neq; omnino poſſibile eſt Ideam habere Lineæ infinitè productæ. Fortaſſe ex eo quod in neutram partem coincidant, demonſtrari poteſt, quod ſunt parallelæ, ſive quod ubiq; æque diſtant, ſed ex alia Parallelarum, ſive Æquidiſtantium definitione.

Deinde per bonas definitiones demonſtrari ſolent & debent concluſiones primæ; hac vero *Euclides* nuſquam utitur.

Definitio deniq; neq; demonſtrabilis eſt, nec eſſe debet; cum ſit Demonſtrationis Principium; hanc autem demonſtrabo a Definitione alia hac, *Parallelæ rectæ ſunt in quarum una ſumptis duobus punctis ad quodcunq; intervallum, ab illis punctis duæ rectæ facientes cum ipſa ad eaſdem partes angulos æquales, ductæ ad alteram ſunt æquales.* Ex qua definitione neceſſario ſequitur duas illas rectas productas nunquam eſſe concurſuras, ut quæ ubiq; ab æqualibus rectis æqualiter inclinatis diſtinentur.

Definitio mea hæc Ideam Æquidiſtantiæ animo ingenerat, nec ab alia priore demonſtrari poteſt; poſſunt autem ab illa multo brevius demonſtrari parallelarum rectarum, vel etiam parallelorum planorum proprietates, quam aut ab *Euclide* aut a *Clavio* demonſtrantur.

Atq; hæc dicta ſufficiant de Definitionibus ad Elementum primum, ex quibus cognoſcere potes quàm bene tum *Clavius*, tum *Euclides*, tum etiam eorum ſectatores naturam Parallelarum, aut Anguli, aut Lineæ, aut Puncti intellexerunt. Videamus jam *Petitiones* utrum æquæ an iniquæ ſint.

Cap. X.

De Pet. 1ª. *El.* 1. *& de Def.* 10.

PEtitio 1ª. *Ut a quovis puncto ad quodvis punctum, rectam Lineam ducere concedatur.*

Si concedatur Lineam habere Latitudinem aliquam visibilem, Æqua est. Nam a puncto ad punctum extendi potest ex lino filum; alioqui factu impossibile est, & propterea Petitio Iniqua est.

Sed illa *Euclidis* γραμμὴ (etsi Latitudinem habeat) duci non potest, nisi in Plano. Planum autem describi non potest sine ope rectæ Lineæ, ita ut neq; recta *Euclidis* neq; superficies plana accuratè describi possit. Opus est instrumentis mechanicis, qualia sunt Regula & Norma, id est non accuratè. Æquum tamen esse fateor ut in opificiis humanis pro accurato habeatur, quod accurato est proximum. Sed quod Lineas Hyperbolicas & Ellipticas duci posse *Euclidistæ* non concedant (cum certius aliquanto Ellipsis & Hyperbole ope fili duci potest, quam Linea recta ope Regulæ) Iniquum est. Itaq; quamdiu Geometræ Lineas has duci posse negant, tamdiu Petitio hæc Iniqua est, & proptera etiam Secunda haberi debet pro iniqua.

Definitiones Elementi secundi faciles sunt, & propter eam causam vitio carent. Idem dico de definitionibus Elementi 3ⁱ. fere omnibus. Fere, inquam,

Notandum enim est quod in secunda definitione Elementi 3ⁱ. definit *Tangere*, per *Tangere nec Secare*, incertum relinquens an Punctum Contactus intelligendum sit in una tantum Linearum contiguarum, an in utraq; an inter utramq;. Potest enim si (quod ille dicit) Punctum nihil est, considerari Punctum inter utramque; nam contigua possunt non modo loco disjungi, sed etiam qualitate aliqua differre, ut colore. Et propterea duo sunt; & sic habebimus tria puncta, nimirum duo in ipsis Lineis contiguis quorum alterum sit album, alterum nigrum, & inter illa duo puncta, tertium nullius coloris. Quemadmodum etiam duæ planæ Superficies admotæ ad contactum mutuum

erunt altera alba, altera nigra, altera nihil, & tamen omnes simul una Superficies.

Non dubito quin *Euclides* Tangentes circulorum semper ducendas putavit per diametrorum terminos; atq; ita Punctum Contactus semper commune fecit trium Linearum, nimirum, arcus circuli, Tangentis circulum, & Lineæ cujusdam per quam Tangens ab arcu dividi & loco separari posset. Neq; credibile est, si Contactum quid sit clarè explicuisset *Euclides*, controversiam inter *Clavium* & *Pelletarium* de angulo Contactus ullam extitisse.

Definitio 10. *Similia circuli Segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales*, aut *in quibus Anguli sunt inter se æquales*. Si in duobus Segmentis circulorum valdè inæqualium inscriberentur duo Anguli inter se æquales, credamne omnem hominem qui agnosceret Angulorum illorum æqualitatem, necessariò etiam agniturum esse ipsorum segmentorum Similitudinem inferri posse ratiocinando, id est inde vel aliunde demonstrari posse. Sed tunc non erit Definitio, nam ea debet esse indemonstrabilis.

Cum Geometria tota versetur circa Quantitates, commensurabilia & incommensurabilia, æqualitatem & inæqualitatem, Figurarum Proportiones & Similitudines; cumq; Principia demonstrandi sint definitiones; Quomodo excusari possunt Geometriæ Magistri qui tanto aliis accuratiores haberi volunt, quod nusquam neq; Quantitatem, neq; Mensuram, neq; Similitudinem definierunt. Neq; ipsam Geometriam, cui, ut videtur, studere homines æquum esse existimaverunt antequam scirent Cui bono? Geometriam rectè definies *esse Scientiam qua ex aliqua vel aliquibus magnitudinibus mensuratis, cognoscimus per ratiocinationem alias non mensuratas*. *Mensuram* autem esse *materiale aliquid quod habenti magnitudinem applicatum semel vel pluries, ipsam æquat*; videmus enim Lineas mensurari Pede, Brachio, &c, Plana Planis, Solida Solidis, Fluida Vasibus seu locis congruis. *Æqualia* autem *esse dices quæ eidem loco congruere possunt*. *Similia quæ sola differunt magnitudine*. *Quantitatem* deniq; *magnitudinem definitam*, nempe Expositione aut comparatione cum alia magnitudine cognita. Quæ definitiones

finitiones & faciles sunt & Principia demonstrandi.

Definitio etiam 10ª. *El.* 5ⁱ. *Similia circuli Segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales*, vel *in quibus anguli sunt inter se æquales*, Definitio non est, sed Suppositio. Quænam enim est tanta illa affinitas inter *æqualitatem duorum angulorum* & *Similitudinem duorum Segmentorum circuli*, ut qui intelligit angulos in Segmentis esse æquales, necessariò statim intelligat Segmentorum Similitudinem.

Clavius ad Prop. 22. hujus Elementi tertii demonstrat, quod *Si duo aut plures circuli se mutuò tangant interiùs in uno Puncto, a quo duæ aut plures rectæ educantur, erunt & arcus inter quasçunq; duas Lineas intercepti, & arcus inter quamcunq; Lineam & Punctum Contactus intercepti, similes.* Exempli gratia in Figura ad Cap. VIII, arcus duos B M, B N demonstrat esse similes. Et quidem rectè. Sed ex eo sequetur arcum utrumq; habere latitudinem aliquam, majorem majorem, minorem minorem, alioqui falsum erit, Apelle judice, vel alio quovis Pictore; cum in similibus arcubus inæqualibus latitudines ipsorum arcuum æquales esse non possunt, sed in ipsorum arcuum ratione inæquales. Etiam ut longitudines inæquales quatenus longitudines, similes sint dictu absurdum est.

Hactenus Peccata Definitionum *Euclidis* leviora. Quæ tamen si demonstrationes nullas inficiunt, pro nullis habeantur. Accedo jam ad definitiones Elementi quinti, quæ pertinent ad doctrinam Rationum, & Proportionum, Geometriæ medullam.

Cap. XI.

De Ratione.

PRima est, *Pars est magnitudo magnitudinis minor majoris, cum minor metitur majorem.* Si per Partem intelligat partem aliquotam, & inter partes aliquotas numerat Totum (nam æquale metitur æquale) bona est, & eadem in lineis est res, *pars* & *mensura*.

Definitio

Definitio 3ª. *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.* Quis ex Definitione hac, Latina ſive Græca, naturam Rationis comprehendere intellectu poteſt? Quid enim eſt *ejuſdem generis*? Ubi hoc in antecedentibus explicavit? Quid eſt illud *quædam*, ſive (ut Græcè ſonat) *aliqualis habitudo*? Quid deniq; habitudo? Neq; hoc uſquam definivit, neq; Quantitatem.

Ideam Rationis (de qua hoc loco *Euclides*) omnes perfectam habent. Mercator ſcit ex Quantitate collatæ a ſe pecuniæ, quantum habere debet lucri. Colonus non ignorat quantum uſum agri communis habere debet, ex quantitate agri ſibi proprii. Mercator qui tertiam partem collatæ pecuniæ contulit, ſtatim dicet debere ſibi tertiam partem lucri. Colonus qui poſſidet tertiam partem agri privatim, promptè poſtulabit tertiam partem uſûs agri communis. Unuſquiſq; enim videt ineſſe in ea re comparationem Quantitatis ad Quantitatem, quantitatis expenſi ad quantitatem accepti. Sed Ideam hanc ita oratione generali adæquate complecti, ut inde Regulas generales demonſtrare poſſit, non facile poteſt unuſquiſq;. Juxta hanc Ideam vulgarem, proportionem in Numeris optimè definivit *Euclides* Def. 24ª. El. 7ⁱ. etſi eo loco non Rationem ſed Proportionem dicat. Proportionem autem in alio ſenſu dicit in Def. 4ª. El. 5ⁱ. pro Rationum ſimilitudine. Quod parvi momenti peccatum eſt, niſi quod inconſtantia in vocabulis ſignum ſit obſcuritatis in intellectu. Sed Ideam illam quam habuit *Euclides a partibus iiſdem numerorum*, magnitudinibus quæ non ſemper ſunt ut numerus ad numerum, adaptare non potuit. Itaq; omiſſâ illa reſponſione partium ad partes, coactus eſt Ideam aliam quærere tum magnitudinum, tum numerorum communem. Noverat in quatuor proportionalibus primum ad ſecundum *ita ſe habere* (Græcè οὕτως ἔχειν) ut tertium ad quartum. Itaq; a cogitatione vocis *ita habeat*, quaſi ab Idea ipſa rei (converſo Verbo ἔχειν in Nomen σχέσις, ſeu, Verbo *habere* in Nomen *habitudo*) formavit Rationis Definitionem illam ſterilem, *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis ſecundum quantitatem habitudo quædam*, ſonum verborum ſecutus pro Idea rei.

Antequam

Antequam Rationem definiam, necessarium est definire Quantitatem, & quantitatum diversa genera inter se distinguere. Interroganti enim Quantum est, qui ita respondet ut interrogantis animus acquiescat in eo quod respondetur, necesse est ut magnitudinem de qua quæritur, vel exponat ad oculos, vel determinet per comparationem cum alio quanto per mensuram determinato. Animus enim in Indefinitis non acquiescet.

Sed quia non omnia quanta mensurantur per lineam, nec per Superficiem, nec per Solidum, totidem erunt genera mensuræ, quot sunt genera quantorum. Corpus mensuratur tot mensuris quot habet dimensiones, & proinde tria habet diversa genera quantitatum, nempe Lineam, Superficiem, & Soliditatem; quarum quantitatum unius pars, pars alterius esse non potest. Et in universum Quantitates illæ diversi generis sunt, quarum, pars unius non est pars alterius; vel ut definitur ab *Euclide* quarum una quantumvis multiplicata nunquam alteram superabit.

Lineæ ergo omnes sive rectæ sive curvæ ejusdem sunt generis quantitates; & quia curva extendi potest, ita ut fiat (non mutata quantitate) recta, altera earum multiplicata, alteram superare potest.

Ab his tribus generibus *Clavius* excludit Numerum tanquam genus ab omnibus tribus diversum Non rectè. Numerus semper est in eodem genere quantitatis cum Numerato. Neq; genere differunt Unum & Plura. Numerus autem & Plura idem sunt. Numerus Linearum, & Lineæ habent idem genus quantitatis. Item Numerus Angulorum & Angulus; Temporum & Tempus, *&c.* Quod *Clavius* Lineam finitam & Lineam infinitam ejusdem esse generis negat superfluum est, tanquam si quis diceret Ens & non-Ens esse diversi generis, Linea enim infinita nulla est. Quod autem dicitur in Mathematicis *Infinitum*, id significat solummodo indeterminatum, sive indefinitum, id est, quod quantum sit non est dictum.

Distinguendum etiam est inter Quantum & Quantitatem quorum unum nunquam dicitur de altero.

Præterea etsi Magnitudo, ut Longitudo, Superficies, Solidi-

tas,

tas, solis corporibus tribui propriè possunt, Quantitas tamen multis aliis rebus tribui rectè potest. Quicquid enim est de quo verè dicimus, quod majus vel minus alio est, vel æquale, vel de quo verè dicitur magis vel minus vel æqualiter est, habet illud quantitatem & dimensionem vel unam vel plures, & proinde,

Tempori sua quantitas est quæ exponi potest per Lineam.

Motui est sua sibi quantitas exponenda per Lineam.

Etiam Vis habet suam sibi quantitatem exponendam per Lineam vel Planum. Et Pondus quantitatem suam quæ exponi potest etiam per Lineam vel Solidum. Nec tamen inde inferri potest, aut tempus, aut motum, aut vim, aut pondus, esse Lineam aut aliam magnitudinem.

Deniq; Ratio (quoniam Ratio alia aliâ major est vel minor) quantitatem habet, & per duas Lineas exponitur. Quandocunq; enim exponuntur duæ Lineæ, non modo exponuntur ipsæ, sed etiam ipsarum Ratio. Ratio enim est (ut eam definiam) *magnitudinis ad magnitudinem Relatio.* Neq; exponi potest nisi per duas Lineas, quarum altera Antecedens altera consequens (ut in omnibus ferè aliis Relationibus) appellatur.

Cap. XII.

De iisdem Rationibus.

Def. 6. *In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquè multiplicia, a secundæ & quartæ æquè multiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroq; vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt; si ea sumantur quæ inter se respondent.*

In hac Definitione nulla mentio est *habitudinis unius magnitudinis ad aliam*, cum tamen ex Definitione *Euclidis* verba illa sunt de *Rationis essentia.* Itaq; aut definitio Rationis aut definitio *ejusdem Rationis* vitiosa est. Neq; Axioma est, quia non est lumine naturali cognoscendum. Neq; est ex antecedentibus

dentibus

dentibus demonstrabile. Neq; deniq; de quantitate continua demonstrabile est ex subsequentibus. Et tamen vera est propositio, & conversa Prop. 12. hujus Elementi quinti. Demonstrari autem potest per definitionem quam ego posui hanc, Ratio *est duarum magnitudinum secundum quantitatem Relatio*, & demonstratam vidi.

Clavius, sentiens (ut puto) definitionem hanc egere defensione, longam, de causa propter quam *Euclides*, *quatuor magnitudines proportionales & non proportionales*; *per earum æquè, multiplicia definierit*, orationem instituens, nullam adfert causam aliam, præterquam quod propter multarum magnitudinum incommensurabilitatem coactus sit investigare aliquid, quod certum sit convenire quibuscunq; numeris eandem habentibus proportionem, deinde idem demonstrare convenire etiam in commensurabilibus. Hoc tamen nusquam præstitum est. Itaque idem est ac si dixisset, ideo illum proportionalia sic definiisse, quia definitionem meliorem nondum poterat reperire.

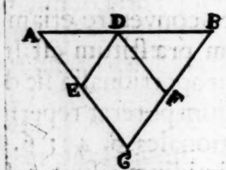
Exponantur quatuor numeri proportionales 8. 4 : : 6. 3. Vides hic duas Relationes totius ad dimidium; sunt enim totum & dimidium Relativa, & Relatio totius 8 ad dimidium suum 4. eadem Relatio quæ totius 6. ad suum dimidium 3. Idem dici etiam potest de tertiis, quartis, &c. æquè ac de dimidiis. Patet ergo Rationem esse Relationem; & Rationem eandem esse Relationem eandem. Et propterea proportionem in numeris *per Partes easdem* rectè definivit *Euclides*. Sed invenire debuit aliquid quod Rationibus etiam magnitudinum incommensurabilium conveniret. Cur autem non fecit? An impossible erat? Nescio, nisi quod sit difficile. Duæ Lineæ simul atq; ductæ sunt, habent inter se Rationem suam, quæcunq; ea sit. Et quæ Causa efficiens erat ipsarum Linearum, eadem erat & causa ejus quam habent inter se Rationis. Causa ipsarum Linearum efficiens erat Ductio, id est motus, quare etiam Causa efficiens Rationis quam habet earum altera ad alteram erat motus ille idem, ex quo motu Lineæ ipsæ ortæ sunt. Etiam Ratio illa eadem erat in Motibus ipsis quibus illæ Lineæ erant *descriptæ*. Quærenda ergo est Rationis duarum Linearum inæqualium *identitas*, sive *æqualitas*, sive *similitudo*

(quæ

(quæ tria nomina in Rationibus idem significant) in Motuum inæqualium aliqua similitudine, id est, in responsione partis ad partem vel portionis ad portionem (sive illæ partes aliquotæ sint, sive non sint) itaq; qui tales motus excogitaverit, proportionalia ipsa determinabit ductisq; Lineis rectis determinabit exponetq; oculis.

Factu autem difficile non est. Nosti enim *motu sive ductu Lineæ uniformi, partes Lineæ descriptas æqualibus temporibus semper esse inter se æquales.* Item si Linea descripta sit eadem semper velocitate partes ejus æqualibus temporibus descriptæ esse etiam inter se æquales.

Sit recta A B descripta motu uniformi, in Tempore quocunque; & in parte aliqua ejusdem temporis, eodem motu uniformi, descripta sit A D pars rectæ A B. Quoniam ergo motus uniformis erat in omnibus partibus æqualibus temporis, descriptæ erunt partes æquales tum totius rectæ A B, tum rectæ A D. sive illæ partes toti A B sint, vel non sint commensurabiles.



CAP XX

Eodem tempore, motu uniformi quidem, ut ante, sed tardiore, sit descripta recta A. C. faciens cum A B angulum quemcunq; B A C; & quo tempore descripta erat A D, eodem intelligatur descripta A E. Quare in rectis A C, A E, pro partibus sive portionibus sumptis in A B, portiones æquales semper describentur in A C, eodem modo quo tota A B respondet toti A C, & pars A. D parti A E.

Habebunt ergo partes æquales factæ æqualibus temporibus in A C ad partes æquales factas æqualibus temporibus in A B, eandem rationem singulæ ad singulas, quam habet tota A. C. ad totam A B, sive etiam quam habet A E ad A D. Etiam partes omnes æqualibus temporibus factæ in E C (differentia inter A C, A E) ad partes omnes æqualibus temporibus factas in B D (differentia inter A D & A D) singulæ ad singulas, eandem habebunt rationem quam A C tota ad A B totam, vel A E pars ad A D partem.

Quare

Quare si A B & A D sint incommensurabiles,& proinde etiam A C, A E incommensurabiles; intelliganturq; quotlibet partes æquales sumptæ in A B ita ut restet ad complendam A B, pars minor quam una earum partium; & totidem partes æquales intelligantur sumptæ in A D, ita etiam ut restet ad complendam rectam A D, minor quam una harum partium; fiatq; idem in rectis A C, A E, omnes illæ partes æquales simul sumptæ in A B habebunt eandem rationem ad totam A B quam habent partes similes æquales sumptæ in A C ad ipsam A C; & quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in A D ad ipsam A D; & quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in A E ad ipsam A E.

Eædem ergo sunt rationes quas determinat sive exponit motus uniformis (id est motus æqualibus temporibus æquales rectas describens) eodem tempore, nempe ratio A B ad A C, vel A D ad A E vel differentiæ D B ad differentiam E C, sive in commensurabilibus sive in incommensurabilibus.

Quare *rationes easdem Definio esse illas quas exponit in duabus rectis motus uniformis æqualibus* temporibus; vel universalius *in* eadem ratione sunt quæ determinantur a causa quacunque temporibus æqualibus æqualia efficiente.

In eadem Figura, si jungatur B C, & ducatur D F parallela E C secans B C in F, erit triangulum B D F simile toti triangulo B A C, propter angulos ad A & D æquales & angulum ad B communem. Similes autem Figuræ non sunt quæ differunt plus quam magnitudine; nam si non essent æquiangulæ,aut non haberent latera circa æquales angulos proportionalia, non esset inter eas ulla figuræ similitudo. Eadem ergo est ratio A B ad D B, quæ C A ad D F. Sed ut A D ad D B, ita ostensa est esse C A ad E C. Sunt ergo D F & E C æquales; & proinde (ducta D E) triangula A D E, A B C sunt similia.

Ad definitionem hanc, Propositiones illæ quæ sequuntur in Elemento quinto, de Permutatione, Conversione, Compositione, &c. Rationum, accurrunt, & ad lucem ejus omnes ferè sese demonstrant. *Euclidis* autem demonstrationes duplo plures sunt, propterea quod idem in quantitate continua seorsim a numeris demonstrat; & multo longiores quam erat

 necesse,

necesse, propter sterilitatem definitionis Rationis.

Sed quid (inquies) opus est Theorematum purè Geometricorum, demonstrationes a motu petere. Respondeo primo. Demonstrationes omnes nisi Scientificæ sint, vitiosæ sunt; & nisi a causis procedant, Scientificæ non sunt. Secundo, nisi conclusiones a constructione, id est a descriptione Figurarum, id est a Linearum ductione demonstrentur, vitiosæ sunt. Jam omnis Linearum ductio motus est; itaq; vitiosa est omnis demonstratio cujus Principia prima non continentur in definitionibus motuum quibus Figuræ describuntur. Sed post theoremata aliquot prima demonstrata, cætera ab his dependentia non egent demonstratione quæ fit a motu, ut quorum demonstrationes in demonstrationibus priorum continentur, nec alia re egent, ut intelligantur, præter illorum priorum explicationem, vel conversionem.

Cap. XIII.

De Rationum calculo.

DEfinitio 10. irreprehensibilis est, nempe hæc. *Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam; Et semper deinceps, uno amplius quamdiu proportio extiterit.*

Est autem quod reprehendi potest & debet in expositione hujus definitionis apud *Clavium.*

Sic enim scribit, *Interpretes nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem hujus. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam,* &c. *Quod tamen nulla*

la est ratione concedendum. Neq; enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam ejus proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, ut diximus. Non autem intelligit, illam duplam esse hujus, ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. *proportionem* 25. *ad* 1. *duplam esse proportionis* 25. *ad* 5. *cum potius eam quis dixerit esse quintuplam?*

In illis qui putant, positis tribus continuè proportionalibus, rationem primi ad tertium duplam esse rationis primi ad secundum; item positis quatuor proportionalibus, rationem primi ad quartum triplam esse primi ad secundum, ubi primum est omnium maximum, etiam ego sum. Exempli gratia in his numeris 8. 4. 2. 1. dico rationem 8 ad 1 esse triplam rationis 8 ad 4; & sesquialteram rationis 8 ad 2; & rationem 8 ad 2 duplam esse rationis 8 ad 4. Non solum quia *Euclides* rationes illas triplicatas vel duplicatas appellat, sed quia verum est, & lumine naturali æquè manifestum, ac unum & unum esse duo, aut unum & duo esse tria.

Vox qua utitur hoc loco *Euclides*, nempe διπλασίων, & vertitur à *Clavio duplicata*, aliis in locis utitur pro dupla. Primo in Prop. 20. El. 3°. Itaq; angulus in Centro, non minus dicitur duplicatus anguli in circumferentia, quam duplus. Etiam a *Clavio* vertitur vox illa Græca διπλασίων non modo per *duplex*, sed etiam per *duplus*; in propositione ipsa & in conclusione per *duplex*, scilicet ne dissentire videretur propositio a conclusione; sed in demonstratione, per *duplus*. Si ergo *duplicatum*, *duplex*, & *duplum*, in quantitatibus non idem significant, non debuit illis uti ut idem significantibus.

Rursus in Propositione ultima El. 9. eadem voce Græca utitur *Euclides* pro ratione 2 ad 1 vel 4 ad 2, ubi rursus *Clavius* illam

illam reddit per *duplam*. Nonne ergo & ipse *Clavius* ex eo quod dixit *Euclides* duplicatam, intellexit (sicut alii) duplam. Qui verbi ejusdem significationem modo unam modo aliam facit, mihi quidem videtur subjectam rem nullo modo intelligere. Quo autem nomine appellabunt rationem 8 ad 4 comparatam cum ratione 8 ad 2? Dicent illam esse hujus *subduplicatam*, & rationis 8 ad 1 *subtriplicatam*. Numerum autem numeri subduplum dicent, non subduplicatum; & numerum 2 numeri 6 non subtriplicatum sed subtriplum, Nomina Latinæ genti inaudita. Itaq; cessantis jam Linguæ verba quæ velut Testamenta morte confirmata sunt,& quæ mutari non debent, suo arbitrio sine necessitate mutat. Quid enim omnino significat subduplum aut subduplicatum, si significat aliquid præter dimidium aut subtriplum vel subtriplicatum præter tertiam partem. Retinebo ergo vocabula propria, *duplicatum* vocans etiam *duplum*, & triplicatum triplum; nec pro *subduplicato* & *subtriplicato* dubitabo dicere *dimidium*, & *tertiam partem*, vel (si libet) *trientem*. Etiam in Rationibus, (quanquam id non concedat *Clavius*) similiter dicam, nisi id falsò dici ostendat. Quod enim rogat, *Quis affirmabit in his numeris* continuè proportionalibus 25. 5. 1, proportionem 25 ad 1 duplum esse proportionis 25 ad 5? Potius eam quis dixerit esse quintuplam, nihil probat. Quid, quia terminus primus est quintuplus, secundi, & secundus tertii, ob eam causam dixerit aliquis rationem 25 ad 1, quintuplam esse rationis 5 ad 1 potius quam duplam? Manifestum est rationem 25 ad 5 esse rationem unicam, & rationem 5 ad 1 esse etiam unicam & ipsi æqualem; & rationem 25 ad 1 componi ex illis rationibus duabus æqualibus. Quid aliud ergo negat *Clavius* nisi rationem ex duabus rationibus æqualibus compositam constituere unius earum duplam? Cur autem hoc negat? Quia numerus 25 numeri 5 est quintuplus, scilicet oblitus quæstionis, quæ non instituitur de numero vel magnitudine aliqua absoluta, quæ sit alterius quintupla, sed de ratione quæ est magnitudo comparativa; itaq; rationem unicam 25 ad 5 computavit pro quinq; rationibus. Natus est error *Clavii* ex eo quod vulgo

apud Mathematicos vocabatur ratio quintupli ad ſimplum quintupla ratio, & ratio dupli ad ſimplum (ut El. 9°. Prop. ult.) ratio dupla imperitè & falſò; nam ratio 2 ad 1 non eſt ratio dupla, ſed ſimpla, nempe dupli ad ſimplum. Neq; quicquam valet quod illuſtrationis cauſa ſubjungit, quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ; cum tamen quadruplæ duplicata ſit ſedecupla, ut hic patet 16. 4. 1. Difficile conceptu eſt quomodo octupla proportio magis ſit quadruplæ duplæ, quam octuplicata ſit quadruplicatæ duplicatæ. Eſto autem octupla proportio quadruplæ dupla. Quid ſequitur? Nonne quemadmodum in his numeris 16 unitates duplæ ſunt octo unitatum; ita ſedecem rationes duplas eſſe octo rationum, & proinde etiam duas rationes 16 ad 4, & 4 ad 1 duplam eſſe rationis 16 ad 4, vel 4 ad 1; id quod *Clavius* demonſtratum nollet?

Poſtremò, objiciens quærit, in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, ut 4. 4. 4. atq; adeo continuè proportionalibus, qui fieri poteſt ut proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? Profecto ſi ratio 4 ad 4 nempe ratio æqualis ad æquale, id eſt ipſa æqualitas quantitas ſit, valida eſt objectio. Sin quantitas non ſit, frivola eſt; cùm nihil ad nihil additum, vel per nihil multiplicatum ſemper facit nihil. Antequam autem ad hanc & alias ejus objectiones reſpondeam, non abs re erit *quantorum* genera amplius (ex ipſis *Euclide* & *Clavio*) diſtinguere, & quid ſit rationum *additio* & *ſubtractio*, ex iiſdem, explicare; & cur in tribus continuè proportionalibus, quorum primum eſt maximum, rationem primi ad tertium duplam eſſe dixi rationis primi ad ſecundum; non tamen quando primum eſt minimum.

Cap.

Cap. XIV.

Adhuc de Rationum calculo.

Def. 5ª. El. 6ⁱ. hæc eſt, *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem*, & vera eſt. Nam ſi ſint proportiones illæ duæ eædem vel non eædem, ſive prima maxima ſit, vel non maxima, ſemper illis conveniet Definitio. Exempli gratia in his numeris 4, 2. 6, 3. ubi rationes ſunt eædem, ſi multiplices inter ſe antecedentes 4 & 6, qui faciunt 24, & conſequentes 2 & 3 qui faciunt 6, ratio naſcens erit ratio 24 ad 6, id eſt 4 ad 1, id eſt duplicata rationis 4 ad 2, vel 6 ad 3. Rurſus in iiſdem numeris inverſis 2, 4. 3, 6 multiplicatis inter ſe tum antecedentibus tum conſequentibus oritur ratio 6 ad 24 ſive 1 ad 4, quæ eſt duplicata rationis 2 ad 4. Rurſus ſint rationes non eædem, ut in his numeris 4, 2. 6, 4 multiplicatis tum antecedentibus tum conſequentibus gignetur ratio 24 ad 8 ſive 12 ad 4. Expoſitis autem his numeris 12. 6. 4, erit ratio 12 ad 6 eadem cum ratione 4 ad 2, & ratio 6 ad 4 eadem quæ antè. Idem in horum converſis continget 2, 4. 4, 6. Atq; hinc intelligere licet quid ſint illæ quas appellat *Euclides* rationum *quantitates*, nempe rationum antecedentes & conſequentes. Nec tamen voluit tantam eſſe rationem quanta eſt antecedens, aut quanta eſt conſequens ejus; quarum utraq; eſt quantitas abſoluta; ſed neutra earum ratio. Quantitatem autem rationis 4 ad 2 interpretatur *Clavius* per fractionem $\frac{4}{2}$; & rationem 6 ad 3 per $\frac{6}{3}$, quas appellat etiam rationis Denominatores; quas ſi inter ſe multiplices, habebis quidem fractionem cujus Numerator ad Denominatorem rationem habet compoſitam ex rationibus 4 ad 2 & 6 ad 3; propterea quod etiam ſic multiplicantur inter ſe tum antecedentes tum conſequentes ut prius; non eſt autem fractio $\frac{24}{6}$ nec $\frac{4}{1}$ ratio compoſita, nec omnino ratio, cum ſit pars quantitatis abſolutæ. Aliud enim eſt $\frac{4}{1}$ id eſt 4, aliud ratio quaternarii ad unitatem. Ratio enim duabus lineis exponitur ſemper, at quantitas abſoluta unica.

Quod

Quod *Clavius* hic ſcribit, *Quoniam denominator cujuſlibet proportionis exprimit quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem, dici ſolet propterea quantitas rationis*. Recte quidem dicit *exprimit*, non recte autem Arithmetici dicunt *eſſe*, nempe quotientem Diviſionis numeri per numerum eſſe rationem ipſam Diviſi ad Diviſorem, unde multa in Geometriam irrepſerunt abſurda, & plura indies conſequentur; quorum cauſa magna ex parte fuit *Clavii* hæc impropria locutio. Qualis etiam videtur tibi hæc oratio in Mathematicis, *quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem?* Debebat enim dicere, *quanta eſt magnitudo antecedens ut comparata cum conſequente*, vel *quanta eſt ratio magnitudinis antecedentis ad magnitudinem conſequentem?* Scio *Clavium* Linguæ Latinæ ſcientiſſimum fuiſſe, ſed huic illius ſententiæ de compoſitione rationum inimica erat elocutio clara.

CAP. XV.

Etiam de Rationum Calculo.

CLavius ex hac Def. 5ª. El. 6ⁱ. recte infert, *Quod in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad ultimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c.* Cujus etiam demonſtrationes aliquot adfert ex *Theone*, *Vitellione*, *Eutocio* & *Apollonio*, ita ut nullo modo a *Clavio* negari poſſit, qui eandem (in numeris) pro definitione ad El. 7ᵐ. poſuit. Itaq; in tribus lineis A, B, C ordine expoſitis ratio A ad C, componitur ex rationibus A ad B, & B ad C; & rurſus ratio C ad A componitur ex ratione C ad B & ratione B ad A.

CAP XV

Per definitionem 5ᵃᵐ. El. 5ⁱ. quæ hæc eſt, *Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare* explicat *Euclides* (ut

rectè dicit *Clavius*) quidnam requirant duæ quantitates ejusdem generis ut rationem dicantur habere, nempe, si non habeant hanc conditionem ut altera possit multiplicata alteram superare, non esse illas neq; ejusdem generis, neq; habere inter se Rationem.

Unde manifestum est primò Lineam, Superficiem, & Solidum esse diversa genera, vel potius diversas species quantitatis. Nulla enim harum quantumvis multiplicata alteram superabit.

Secundò, Angulus genitus ex motu circulari, & Angulus Contactus, diversæ sunt species quantitatis. Angulus enim Contactus nulla unquam multiplicatione superabit Angulum genitum ex motu circulari.

Tertiò, Ratio majoris ad minus, & ratio minoris ad majus, sunt diversæ species quantitatis. Nam ratio minoris ad majus quanto magis multiplicatur tanto semper minor est.

Cap. XVI.

Etiam de Rationum calculo.

CLavius ad Prop. 23. El. 16. aliam habet methodum componendi rationes. Sint duæ rationes 6 ad 4, & 2 ad 8 componendæ. Fiat ut 2 ad 8, ita consequens 4 ad aliam 16; eritq; ratio 6 ad 16 composita ex rationibus 6 ad 4, & 2 ad 8. Positis enim ordine his numeris 6, 4, 16, priores duæ habent rationem 6 ad 4; posteriores duæ rationem 2 ad 8.

Habet etiam methodum auferendi rationem minorem a majore. Sit ratio 1 ad 4. auferenda ratione 2 ad 4. Fiat ut 2 ad 4 ita antecedens 1 ad aliam 2; & collocentur ordine tres numeri 1, 2, 4. Ratio 1 ad 4 componitur ex rationibus 1 ad 2, & 2 ad 4. Quare ab lata ratione 2 ad 4 ex ratione 1 ad 4, reliqua est ratio 1 ad 2.

Similiter si ex ratione 3 ad 2 auferenda sit ratio 2 ad 3, fiat ut 2 ad 3, ita 3 ad aliam $4\frac{1}{2}$. Nam positis ordine, 3. $4\frac{1}{2}$. 2, ratio 2 ad 3, id est ratio 3 ad $4\frac{1}{2}$ aufertur a ratione 3 ad 2, & relinquitur

quitur ratio $4\frac{1}{2}$ ad 2. Atq; hæ methodi ambæ comprobantur a *Clavio* ad Prop. 23. El. 6.

Cap. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

RЕspondeo jam ad quæsita *Clavii*, & primo ad hoc, *Qui fieri potest ut positis tribus magnitudinibus æqualibus* 4, 4, 4 *ratio primæ ad tertiam dupla sit rationis primæ ad secundam, cum sit omnino eadem?*

Quoniam ratio primæ 4 ad secundam 4, quantumvis multiplicata nunquam superabit rationem eandem 4 ad 4 neque quantumvis per medias interpositas divisa ab illa superabitur, manifestum est rationem 4 ad 4 (& in universum) æqualis ad æquale) non esse quantitatem, neq; posse æqualitates alias aliis majores vel minores esse. Inæqualitatum autem alia alia major esse potest, & proinde habet quantitatem. Jam quod quærit *Clavius* quomodo positis ordine 4, 4, 4 ratio primæ ad tertiam dupla esse potest rationis primæ ad secundam idem est ac si quæsiisset quomodo positis tribus cifris 0, 0, 0 ratio primæ ad tertiam potest esse dupla rationis primæ ad secundam; cum revera & propriè loquendo, unum nihil, alterius nihil neq; duplum neq; duplicatum est.

Rursus *Clavius* ad finem El. 9[i]. ut probet rationem duplicatam, non esse rationem duplam, sic scribit. *Imprimis igitur compositionem proportionum* (vocabulis enim ratio & Proportio aliter quam *Euclides* promiscuè utitur) *de qua Euclides agit Def.* 10. *Lib.* 5, *&c. & in propositionibus duplicatam triplicatam, & compositam proportionem de magnitudinibus vel numeris demonstrat, dico non esse verè additionem proportionum, ita ut duplicata vel triplicata proportio sit duplo aut triplo major ea proportione cujus illa dicitur duplicata, triplicatave ; item ut proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quippiam, cujus partes sunt proportiones ex quibus dicitur composita. Nam, &c. Si positis his terminis continuè proportionalibus* 1. 10. 100,

 proportio

proportio 1 *ad* 100 *non solùm duplicata diceretur proportionis* 1 *ad* 10, *sed verè esset duplo major*, *&c. quis non videt partem esse majorem toto?*

Respondeo primò non videri mihi rectè illatum ex eo quod 1, 10, 100 sunt continuè proportionales & ex eo quod ratio 1 ad 10 majus sit ratione 1 ad 100, partem esse majorem toto.

Secundò, si illatio legitima sit, necesse est, quanquam absurda sit, sit tamen vera. Nam ipse *Clavius* utrumq; affirmat (nec quisquam negat) nempe,& rationem 1 ad 100 esse totum, cujus pars est ratio 1 ad 10; & rationem 1 ad 10 majorem esse ratione tota 1 ad 100. Itaq; si qua hic verè subsit adsurditas, *Clavii* est, nec solùm illorum qui dicunt rationem duplicatam esse duplam. Latet autem illa vel in assumpto hoc, *In magnitudinibus quibuscunq; ordine positis, rationem primæ ad ultimam composita est ex rationibus intermediis*; vel in diverso genere rationis majoris ad minus a genere rationis minoris ad majus. Quare proprietates tum rationum ordine positarum, tum utriusque generis rationum diligentiùs paulo considerabimus.

Et primo, in rationibus ejusdem generis, sive magnitudines decrescant perpetuò a majore ad minus, sive perpetuò crescant a minore ad majus, compositio vera est. Sint enim tres numeri 100, 10, 1, quæ rationes sunt majoris ad minus. Manifestum est rationem 100 ad 1 compositam esse ex rationibus 100 ad 10,& 10 ad 1, eandemq; tum duplicatam tum duplam esse rationis utriusvis 100 ad 10, vel 10 ad 1. Item inversim, ubi rationes 1, 10, 100 sunt minoris ad majus, manifestum est rationem compositam 1 ad 100 æqualem esse ambabus rationibus 1 ad 10, & 10 ad 100 inter se æqualibus.

Deinde in his numeris 16, 4, 2 manifestum est rationem compositam 16 ad 2 æqualem esse duabus rationibus 16 ad 4, & 4 ad 2, quarum prima ratio secundæ est duplicata, tota autem ejusdem secundæ triplicata. Item in his numeris illorum inversis 2, 4, 16 composita ratio 2 ad 16 æqualis est duabus rationibus quarum secunda est primæ duplicata, composita autem ejusdem primæ triplicata.

Etiam in tribus aliis quibuslibet magnitudinibus quarum

prima

prima eſt maxima, tertia vero minima, idem continget; ut in his numeris 12, 8, 2, ubi ratio primæ ad ſecundam eſt eadem quæ 3 ad 2, ratio autem ſecundæ ad tertiam eadem eſt quæ 2 ad $\frac{1}{2}$. Componamus has primò juxta definitionem traditam ab *Euclide*, Def. 5. El. 6, per multiplicationem inter ſe tum antecedentium, tum conſequentium. Oritur autem ratio 12 ad 2, cujus partes componentes erunt rationes 3 ad 2, & 2 ad $\frac{1}{2}$; id eſt (multiplicatis omnibus terminis per 4) ratio 12 ad 2 compoſita ex rationibus 12 ad 8, & 8 ad 2.

Deinde componamus eaſdem per regulam compoſitionis aliam traditam a *Clavio* ad Prop. 23. El. 6[i]. Fiat ergo ut 8 ad 2, ita 2 ad aliam $\frac{1}{2}$. Expoſitiſq; numeris 3, 2, $\frac{1}{2}$, erit ratio compoſita 3 ad $\frac{1}{2}$ æqualis rationibus componentibus 3 ad 2, & 2 ad $\frac{1}{2}$. Nam multiplicatis omnibus terminis per 4, naſcentur numeri 12, 8, 2 iidem qui prius.

Itaq; nihil video quo minus propoſitio illa, nempe, *ratio primi ad ultimum compoſita eſt ex rationibus intermediis* pro vera habeatur. Adverto etiam obiter rationes componendi Methodum hanc Clavianam eſſe veram rationum Additionem. Non autem ut vult *Clavius* Multiplicationem.

Quomodo autem eadem propoſitio, nempe, *rationem primi ad ultimum compoſitam eſſe ex rationibus intermediis*, locum habeat quando una ratio eſt majoris ad minus, altera minoris ad majus difficile explicatu eſt. Sint continuè proportionales 1, 10, 100. Sed alio ordine collocatæ, ut 1, 100, 10. Cum ergo per propoſitionem illam univerſalem, ratio 1 ad 10 compoſita eſt ex rationibus 1 ad 100, & 100 ad 10, ſicut totum ex partibus, erit ratio 1 ad 100 pars rationis 1 ad 10. Sed quota pars? Ea ſcilicet pars quam Geometræ nunc appellant ſubduplicatam rationis 1 ad 10. Quia vero ratio 1 ad 100 minor eſt quam ratio 1 ad 10, erit pars 1 ad 100 minor quam reliqua pars quanto ratio una minor eſt quam duæ & ſunt ambæ rationes 1 ad 100, & 100 ad 10 partes rationis 1 ad 10, ſi modo ratio 100 ad 100 (quæ quantitas non eſt) pro quantitate computetur; alioqui ratio 100 ad 10 non poteſt eſſe pars rationis 1 ad 10. Neq; enim duæ quantitates diverſi generis, quales oſtendi ſuprà eſſe rationes minoris ad majus, & majoris ad minus, partes ejuſdem quantitatis eſſe poſſunt.

Quo

Quo ergo ſenſu, inquies, verum eſt componi rationem 1 ad 10 ex rationibus 1 ad 100, & 100 ad 10? Reſpondeo, verum eſſe ſecundum verborum ſenſum proprium, nimirum ſi ratio 100 ad 10 ſive ratio 10 ad 1 addatur rationi 1 ad 100 naſci rationem compoſitam 1 ad 10 æqualem duabus rationibus 1 ad 100, & 1 ad 10. Id quod facilius intelliges, ſi prius duo illa genera rationum quomodo creſcunt, minuuntur, componuntur, & alterum ab altero ſubſtrahitur, clarè explicavero.

Sumantur ergo quinq; magnitudines continue proportionales in ratione majoris ad minus, exempli cauſa, 81, 27, 9, 3, 1, quarum inverſæ 1, 3, 9, 27, 81. ſunt in ratione continua minoris ad majus; & media omnium eſt 9. In his, incipiendo a maxima deſinendo in media tres primæ ſunt rationes majoris ad minus; incipiendo autem a minima, deſinendo in media, tres primæ ſunt rationes minoris ad majus.

Rurſus incipiendo a maxima, ratio primæ ad tertiam eſt major ratione ejuſdem primæ ad ſecundam, nempe duplo major; Contrà incipiendo a minima, ratio primæ ad tertiam minor eſt ratione primæ ad ſecundam, nimirum duplo minor.

Tertio, incipiendo a maxima, ſemper prima majorem rationem habet ad eam quæ propior eſt tertiæ, quam ad eam quæ ab eadem tertia eſt remotior; Contrà vero incipiendo a minima, ſemper prima minorem rationem habet ad eam quæ tertiæ propior eſt quam ad eam quæ a tertia eſt remotior.

Quarto, incipiendo a maxima, rationes ſunt exceſſuum quibus majores ſuperant minores; Contrà verò incipiendo a minima, rationes ſunt defectuum quibus minores deficiunt a magnitudine majorum.

Quinto, ratio tertiæ ad tertiam (quæ eſt æqualitas) in rationibus exceſſuum minor eſt omni ratione exceſſus; contrà verò, ratio æqualitatis major eſt omni ratione defectus; & quia ratio æqualitatis quantitas non eſt, erit quantitas rationis defectus minor nihilo, tanto quanto ratio exceſſus ipſi reſpondens major eſt nihilo.

Exempli gratia exponantur in margine eædem magnitudines proportionales; & quia ratio 81 ad 9

81.	27.	9.	3.	1.
2.	1.	0.	1.	2.

duplicata

duplicata est rationis 27 ad 9, sub 81 ponatur 2; & sub 27 ponatur 1, quæ significent duplicatam rationem & unam rationem; ponatur autem cyphra sub 9, propterea quod ratio 9 ad 9 quantitas non est. Similiter sub 1 ponatur 2, & sub 3 ponatur 1. Vides itaq; rationem 81 and 9 duplo majorem esse ratione 27 ad 9, quia rationes illæ sunt ut duæ rationes excessûs ad unam; item rationem 1 ad 9 duplo minorem esse ratione 1 ad 3, propterea quod sunt ambæ rationes defectûs. Quoniam igitur ratio 1 ad 9 duplo minor est quam ratio 1 ad 3, manifestum est rationem 1 ad 3 duplo majorem esse quam ratio 1 ad 9.

His intellectis ostendendum est quomodo in his numeris 1. 100. 10, ratio 1 ad 10 componitur ex rationibus 1 ad 100, & 100 ad 10.

Quoniam enim rationes 100 ad 10 & 10 ad 100 simul additæ faciunt rationem æqualitatis, id est altera alterius quantitatem extinguit, restabit ratio 1 ad 10 pro summa rationum 1 ad 100 & 100 ad 10; Ut qui unum dederit carenti duobus, facit ut careat tantummodo uno.

Atq; hoc exactè convenit cum Def. 5ª. El. 6ⁱ. Nam antecedentes rationum 1 ad 100, & 100 ad 10, sunt 1 & 100; consequentes autem 100 ad 10. Antecedentes in se multiplicatæ faciunt 100; consequentes autem multiplicatæ in se faciunt, 1000, sed ratio 100 ad 1000 eadem est cum ratione composita 1 ad 10. Componitur ergo ita ratio 1 ad 10 ex rationibus 1 ad 100 & 100 ad 10, ut partes componentes sint vere partes rationis compositæ. Sed rationes 1 ad 100 & 100 ad 10 non sunt partes ejusdem rationis compositæ 1 ad 10; neq; esse possunt, cum sint diversi generis rationes.

Vides ergo rationem duplicatam duplam quoq; esse, hoc est duplo majorem esse ratione quæ duplicari dicitur. Ut in iisdem proportionalibus 1. 10. 100. ratio defectus; 1 ab 100 duplicata est rationis defectus 10 ad 100 (duplicata scilicet defectus ratione) & propterea etiam duplo major, quia sublatio defectus quantitatem auget.

Manifestè hinc sequitur Theorema hoc universale.

Si fuerint quotcunq; magnitudines continuè proportionales,

nales, quarum prima eſt maxima; quanto prima ad aliam a ſe remotiorem quam eſt proxima, majorem rationem habet quam ad ipſam proximam; tanto in iiſdem magnitudinibus, inverſo ordine collocatis, minima majorem rationem habet ad ſibi proximam, quam ad remotiorem in eadem diſtantia. Exempli gratia, in his magnitudinibus, 81. 27. 9. 3. 1. quanto major eſt ratio 81 ad 3 quam ratio 81 ad 27; tanto major eſt ratio 1 ad 3 quam ratio 1 ad 27, quanquam Geometræ qui nunc ſunt id non concedant.

Sed ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat naturam Rationis ne *Euclidi* quidem penitus perſpectam fuiſſe; multo autem minus *Clavio*; ſed minime omnium illis qui nunc Algebriſtæ perhibentur. Nam hi, a *Clavio* docti denominatorem rationis indicare ipſius quantitatem (ut 4 ſive $\frac{4}{1}$ denominat, indicatq; quantitatem rationis 4 ad 1, & $\frac{2}{3}$ indicat rationem 2 ad 3) ſunt autem illi denominatores nihil aliud præter Quotientes natas ex diviſione numeri per numerum, temerè arripuerunt quaſi rem demonſtratam, *Fractionem & Rationem eandem eſſe rem*, nempe quantitatem abſolutam & quantitatem comparativam; quæ comparativa, quantitas omnino non eſt niſi reſpectu ad aliam rationem. Rationis enim magnitudo non determinatur, nec exponitur per unam lineam ſicut quantitas abſoluta, ſed per duas. Atq; ab hoc errore tot abſurda conſequuta ſunt, ut vix magno volumine commodè contineri poſſint; quorum præcipua infrà paucis conſiderabimus, unà cum aliis quæ ex aliis principiis falſis in Geometrarum ſcripta irrepſerunt.

Numerat duodecem alia genera rationum *Pappus*, quorum duo conſiderat in commentario ad Def. 6. El. 5. *Clavius*, nimirum rationem Arithmeticam & rationem Harmonicam ſive Muſicam. Atq; Arithmeticæ quidem ſatis bene convenit Definitio rationis tradita ab *Euclide*. Nam quantitates duæ quarum una alteram ſuperat quantitate determinata habent inter ſe habitudinem quandam ſecundum quantitatem. Ratio autem quam Harmonicam vocant eſt habitudo quædam non duarum ſed trium magnitudinum. De utraq; ſatis multa & ingenioſa habet *Clavius*. Ratio autem Arithmetica eadem

eſt,

est, cum quanto prima superat secundam vel ab ea superatur, tanto secunda superat tertiam vel ab ea superatur. Sed ratio Harmonica eadem est, quando extremæ sunt inter se ut differentiæ a media sumptæ, major extrema ad majorem differentiam, & minor ad minorem.

Putasne in aliis Scientiis majus peccatum inveniri posse quam est in Geometria non rectè explicasse quid sit Ratio? Quis scriptor Ethicus usus est definitione *Boni* non bona, vel Politicus definitione *Juris* vitiosa? Attamen ejusdem est in Geometria momenti definitio Rationis cujus est in doctrina Ethica definitio *Boni*, & in Politica definitio *Juris*?

Deinde, quod dicit *Clavius*, proportionem illam in tribus numeris ubi major extremorum est ad minorem ut differentia majoris & medii ad differentiam medii & minoris, esse Musicam seu Harmonicam, temerè dictum est. *In his* (inquit) *numeris* 6. 4. 3, *est ut* 6 *ad* 3, *ita* 2 *differentia duorum majorum, ad* 1 *differentiam duorum minorum. Quoniam autem* 6 *&* 3. *faciunt consonantiam Diapason*; 6 *&* 4 *consonantiam Diapente*; *& denique* 4 *&* 3 *consonantiam Diatessaron, vocari solet hæc proportio Harmonica.* Quod si ita sit, cur non etiam in his numeris 6. 3. 2. vel in his 42. 12. 7. quæ cadunt sub eandem definitionem, eædem sunt consonantiæ: Quare autem facit ratio 6 ad 3, vel totum quodlibet ad suum dimidium, consonantiam Diapason, nescivit *Clavius*. Id enim primus omnium docuit *Galilæus*, postquam *Clavius* mortuus esset. Nugæ meræ sunt homine Mathematico indignæ. Hactenus de Principiis *Euclidis*. Sequitur Principium aliud quibus utuntur hodie Geometræ tale.

Cap. XVIII.

De Radice numerica, & Latere Quadrati.

SI quadrati duo latera angulum rectum continentia divisa fuerint, utrumq; in quotlibet partes magnitudine & numero æquales, numerusq; partium unius lateris multiplica-

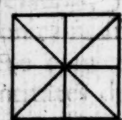
tus

tus sit per numerum partium alterius (id est si duo illi numeri æquales multiplicentur inter se) factus erit numerus quadratorum quorum latera sunt singulæ partes lateris totius quadrati. Exempli gratia, si quadrati latus sit longum 100 pedes, multiplicentur autem 100 pedes per numerum 100, unde factus erit decies mille pedes, erunt (ut illi assumunt) illi decies mille pedes, totidem quadrata, quorum uniuscujusq; latus sit unus pes; & decies mille pedes longitudine simul sumptos æquales esse toti quadrato. Similiter multiplicatis 1000 pedibus per numerum 100, oritur Cubus a toto latere. Potuerunt eadem ratione diviso latere quadrati bifariam, ex multiplicatione 2 in 2 pronuntiare quatuor semilatera æqualia esse ipsi quadrato.

Hæc tu absurdiora esse putabis quam ut quisquam ita computaret. Sed ita est; nec moniti ab illa computatione desistunt. Ita computavit Geometra quidam qui propter Librum quem inscripsit Mesolabium celebris est, monitusq; erroris respondit, ita se computasse sicut computarunt Geometræ omnes qui fuerunt, qui sunt, & qui post erunt aliis in annis. Nihil ergo hic calumniæ est. Quid autem illos a sensu communi seducere tantum potuit?

Decepit illos Primò, idea quadrati numeri qualis appingitur, in qua latera multiplicata in se faciunt numerum quadratum.

Secundò decepit illos, quod crediderint, eandem esse rem, multiplicare partes inter se, & ducere unum latus in alterum, juxta ideam quadrati Geometrici tale, ubi tria latera multiplicata per 3 æqualia esse volunt in ipsi quadrato.

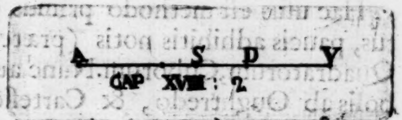


Tertiò, decepit illos authoritas Archimedis (cujus hominis propter stupendissimum ingenium mentionem hoc loco invitus facio) qui magnitudinem circumferentiæ circuli per hujusmodi multiplicationem demonstrare conatus est. Deinde sæculo proximè superiore in calculo *Sub-*

tensarum eadem methodo usus est *Copernicus*, & *Regiomontanus* in doctrina Triangulorum, & postremò *Clavius* in Tabulis condendis Sinuum, Tangentium, & Secantium.

Ex hoc errore nascitur alius, nempe, Radicem numeri quadrati esse quadrati Geometrici latus. Siquidem enim multiplicatio numeri producat quadratum Geometricum, necessariò sequetur radicem numeri facti esse ipsum latus. Non videbant enim, in numeris quadratum numerum & radicem ejus, esse ambo earundem rerum numeros; & proinde radicem numeri quotcunq; quadratorum, numerum esse etiam quadratorum, quemadmodum radix centum hominum sunt decem homines.

Postremo decepit illos, quod eandem rem esse putarint latus quadrati Geometrici, & Radicem quadrati numeri. Itaq; regulam Algebræ, quæ regula est purè Arithmetica, ad Geometriam imperitè applicantes ex ingeniosissima reddiderunt absurdissimam, pro Linea, Quadrato, & Cubo, Unitatem promiscuè supputantes. Exempli gratia cum scripsisset quidam, Si AD ponatur dupla DV & a tota AV detrahatur AS media proportionalis inter ipsas AD, & DV, quæ relinquitur VS erit major duarum Mediarum proportionalium inter ipsas AD, DV; ad hoc confutandum sic ratiocinatus est Professor quidam Geometriæ publicus.



Ponatur DV æqualis 1. AD erit 2. Ponatur AS media proportionalis inter AD, DV, & detrahatur ab AV. Relinquetur VS.

Ergo VS æqualis est 3 minus radice 2.

Quæ multiplicata in se Cubicè facit 45 minus Radice 1682, quod minus est quam quatuor Cubi a DV; quia 45 minus Radice 1681, æquales sunt quatuor Cubis a DV.

Cum ergo Cubus ab AD sit 8, erit Cubus ab VS minor dimidio Cubo ab AD, id est minor majore Mediarum inter AD & DV.

Non disputo hoc loco an major Mediarum duarum revera

 sit

sit V S, sed specimen exhibeo Algebræ hodiernæ, per quam D V est linea 1, & per consequens A D est 2 lineæ; & per consequens (secundum hujusmodi Algebristas) Cubus A D æqualis est 8 lineis; & 45 quadrata a D V minus Radice 1681 æqualia quatuor lineis, nempe, quadruplus rectæ D V.

Reputa tecum an hæc non sint magis absurda quam ulla quæ inveniri possunt in Ethicis aut Politicis *Platonis* aut *Aristotelis*.

Regula autem Algebræ talis est, Theorema quod quæritur, supponatur verum esse; vel quod faciendum est supponatur factum. Ex eo supposito (assumptis aliis cognitis) inferatur conclusio, & ex his aliæ conclusiones, donec veniatur ad Principia, aut ad vera aliunde cognita, quot sufficiunt ad suppositi demonstrationem, vel donec veniatur, si ita contingat, ad absurdum aliquod. Nam si ducatis ad vera quot sufficiunt ad demonstrationem, ex illis veris conversis suppositum demonstrabitur; sin incidas in absurdum, falsum esse scis.

Hac usus est methodo primus (quantum scio) Diophantus, paucis adhibitis notis (præter literas) symbolis Radicum, Quadratorum, Cuborum. Nunc autem tota Algebra aucta symbolis ab Oughtredo, & Cartesio, & ab his ad Geometriam applicata nomen obtinuit Geometriæ symbolicæ; infecitq; hujus ævi Geometras, Geometriæ veræ pestis.

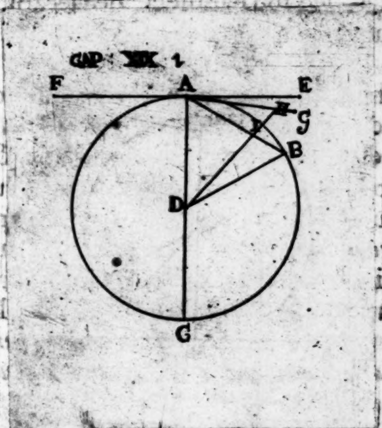
Dixi de Principiis. Videamus nunc an non sit etiam aliqua *Euclidis* vel *Clavii* demonstratio cujus forma sit illegitima.

CAP. XIX.

Prop. 16. El. 3. examinata.

Quæ ab extremitate diametri cujusq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet: & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet, & semicirculi quidem angulus quovis angulo

angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor. *In circulo A B C, cujus centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B: erunt duo anguli D A B, D B A æquales; sed D A B rectus est per constructionem: Igitur & D B A rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neq; eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est E F. Dico jam ex A, inter A E, rectam & circumferentiam A B, non posse cadere alteram rectam.*



Hæc est demonstrationis *Euclidis* (interprete *Clavio*) pars prima; quam dico vitiosam esse. Primò, quod punctum A dicit esse neq; intra circulum neq; in circumferentia ejus. Cum enim punctum A sit terminus semidiametri D A, a qua describitur circumferentia A B C, necesse est ut punctum A sit in ipsa circumferentia. Intulit ergo hanc conclusionem contra ipsam *Euclidis* constructionem, qui supponit perpendicularem F E duci ab extremo puncto diametri. At concesso punctum A non esse in circumferentia, sed perpendicularem

pendicularem F E solummodo radere sive tangere circulum in A; erit tamen punctum A extra circulum & ab eo separabile, more contiguorum. Itaq; ductâ per terminum diametri rectâ quadam parallela ipsi Tangenti F E, illa cadet inter rectam A E & arcum A B, contra demonstrationem hujus partis primæ. Perpendicularis enim ducta per terminum diametri non erit ipsa Tangens A E, sed ipsi parallela, nec secabit circulum, sed habebit punctum cum circulo commune, nempe ipsius diametri terminum.

Deinde quoniam utriusq; semicirculi sunt duo termini, erunt in duobus semicirculis contiguis, ad terminum diametri, duo puncta. Nihil ergo prohibet, quicquid sit punctum, quin duobus terminis pro uno sumptis, diameter unà cum minutissima parte arcus (cum plusquam punctum illud Geometrarum, *nihil* commune sit rectæ perpendiculari & arcui) haberi possint pro lineis quæ faciunt angulum rectum. Nam crura angulorum de anguli essentia omnino non sunt; & sic falsum quoq; erit quod in tertia parte demonstrationis ponit, *angulum quem facit perpendicularis cum arcu, quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.*

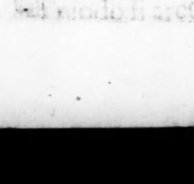
Porrò in secunda & tertia parte demonstrationis sic dicit, *Quoniam ostensum est omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi; at verò cum A E, angulum rectilineum acutum majorem angulo contingentiæ; cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta A B, quomodocunq; infra A E. Nam cum hæc linea A B, intra circulum cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo semicirculi contento sub diametro A C, & circumferentia A B C, cum ille hujus sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea A E, & circumferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto B A E, quod ille hujus pars sit.*

Assumit hic *Euclides* angulum rectilineum CAB partem esse anguli semicirculi, id est anguli facti a recta C A, & circumferentia A B; item angulum contingentiæ partem esse anguli

ctilinei E A B. Sed ex eo manifeste sequitur, Quatuor angulos, nempe rectilineum C A B, angulum semicirculi, angulum contingentiæ, & angulum rectum rectilineum esse ejusdem generis, sicut partes & totum. Et per consequens angulum contingentiæ (per Def. 5. El. 5.) multiplicatum posse superare angulum rectum rectilineum. Manifestum enim est partem multiplicare posse donec suum totum superet. Contradicit ergo *Euclides* huic definitioni suæ quintæ Elementi quinti. Cum ergo angulus contactus, & angulus rectilineus sint diversi generis quantitatis, ita ut altera alteram multiplicata superare non possit (ut ipse *Clavius* demonstrat) angulus contingentiæ ablatus nihil auferet ab angulo recto rectilineo, non magis quam linea ablata aliquid aufert a quadrato aut superficies a solido. Itaque angulus semicirculi angulo recto rectilineo est æqualis.

Itaq; manifestum est angulum contingentiæ, etsi quantitas sit, non tamen esse quantitatem anguli, sed quantitatem diversi generis, nempe curvedinis; ut supra ostensum est. Erravit ergo hoc loco *Euclides*, deceptus a sui ipsius definitione Puncti. In controversia autem inter *Clavium* & *Pelletarium* de angulo contactus veritas erat a parte *Peletarii*, qui sustinuit angulum contactus quantitatem non esse illius anguli, & angulos semicirculorum rectos esse omnes, & inter se æquales.

Quod autem anguli semicirculorum sunt inter se æquales, ex eo quoque intelligere potes, quod supra demonstravi, Similium arcuum æquales esse curvedines. Itaque descriptis duobus Sectoribus similibus A B C, A D E; ductisque Tangentibus B F, D G, & subtensis B C, D E, æqualiter declinabunt arcus B C, D E a Tangentibus B F, D G propter æqualitatem curvedinis



vedinis sive flexionis primæ à punctis B & D. Æquales ergo utrobique sunt anguli contingentiæ, & (per consequens) etiam anguli semicirculorum.

Judicabis item de doctrina hac *Clavii* ex fœtu, Nam monstra inde nata sunt, Primum hoc ipsum, *Angulos semicirculorum esse inæquales.* Contrarium enim lumine naturali satis manifestum est. Secundum hoc, *Transitur a minore ad majus; & per omnia media, nec tamen per æquale.* Id quod nemo cogitans non videret esse falsum. Sed ita est ut nemo fere hodie Philosophetur suo, sed Magistri alicujus ingenio; ideoque in absurda incidunt, non aliter quam totidem oves principem gregis sequentur, etsi in mare se præcipitaret.

Cap. XX.

De Dimenſione Circuli.

PRincipia iſta quæ ſupra a me reprehenſa ſunt, mirum eſt etiam quantum ad pulcherrima Geometriæ Problemata invenienda viam obſtuxerunt; quorum exempla aliqua hic ſibi exhibere operæ pretium eſſe puto.

Sit quadratum A B C D. Centro A, intervallo A B, deſcriptus ſit circuli quadrans A B D. Secentur latera A D, B C biſariam in E & F. Ductâ E F ſecante arcum B D in G, erit arcus B G totius arcus B D pars tertia.

Per punctum G ducatur recta I G K parallela lateri B C ſecans A B in I, & C D in K, producaturq; ad H, ita ut I H ſit tripla I G; deniq; per H ducatur recta N O indefinita, et parallela D C.

Ducatur B G chorda arcus B G, & producatur ad N O in O ſecans C D in P. Deinde centro B intervallo B O deſcribatur arcus circuli ſecans B N productam in Q.

Porrò lateri B A adjungatur in directum A R æqualis duplæ G F, & ducta R D (quæ æqualis erit duplo lateri A D) producatur ad latus B C productum in S, +eritq; C S æqualis Tangenti 30 graduum; tranſibit autem R S per H terminum ſemiradii K H. Ducatur Q *a* parallela N H ſecans R S in *a*. Compleaturq; parallelogrammum B Q *ab*. Poſtremò diviſo arcu B G biſariam in *c* ductoq; ſinu arcus B *c* jungatur R *c*. Hactenus conſtructio.

+ Erit ergo Sinus arcus B *c* ſexta pars rectæ *ba* & ipſi parallelus; ideoq; vel in ipſa *ba* vel ſupra, vel infra. Sumatur A *d* ſexta pars A D, & ducta R *d* productaq; ut ſecet *ba*, abſecabit ſextam ejus partem (propter A *d*, *ba* in triangulo R *ba* parallelas.) Quare abſecabit in *ba* rectam æqualem Sinui arcus B *c*. Quod impoſſibile eſt niſi *ba* tranſeat per *c* cum ſit ut A *d* ($\frac{1}{6}$ A D) ad A D, ita Sinus arcus B *c* ad ſextuplum Sinum arcus B *c*. Tranſit ergo *ba* per *c*.

Eodem modo ſi arcus B *c* ſecetur biſariam fient arcus duodecem,

+ quia IG = BE = ½ AD. erit. FD erit 1 et G
ergo AR = √1
RD = √12 +
= 4 = 2 A

+ CDS triang:
ADR. ADR
quia IG = ½ AD
½ AR ergo C
= B v. Tang
30 grad:

+ sinus Bc erit ½ chorda BG. at BG : GP. PO sun
quia IG. GK. KH

decem, & Sinus eorundem totidem, qui Sinus semper erunt simul sumpti minores arcu B D, majores tamen recta *ba*. Eadem methodo bisecando in perpetuum, ostendi potest, rectam omnem ductam infra B S ipsiq; parallelam, terminatam in rectis A B, D S minorem esse arcu B D; & (per consequens) rectam B S (compositam ex radio & Tangente 30 graduum) non esse arcu B D majorem. Minor autem esse non potest, cum locus nullus ulteriori bisectioni relictus sit. Etiam Geometræ omnes qui magnitudinem circuli determinarunt, arcum B D faciunt minorem quam est recta B S. Habes ergo demonstrationem quadraturæ circuli verbis haud multo pluribus quam quæ sunt in constructione.

...issimum est
...cilicet $\frac{1}{6}$ radii
...= sinui Arcus
at nullo modo
...tur: sinus arcus
...= $\frac{1}{12}$ lineæ
...retæ ... ad
...

Coroll. 1. Si jungatur recta R G secans A D in *f*, producta *ba* in *e*, & B S in *i*, erit B *i* tertia pars rectæ B S, & æqualis arcui B G, & *be* æqualis chordæ B G, & A *f* æqualis Radio circuli cujus quadrans æqualis est arcui B G; & A *d* radius arcus cujus quadrans circuli æqualis est arcui *bc*, & in universum omnes rectæ ductæ ab R ad arcum B G, secabunt A *f* & arcum B G in ratione radii ad quadrantem a se descriptum. Ex quo sequitur facilis divisio arcus sive anguli in ratione data, ut infra patebit ad cap. 23.

Cor. 2. Juncta A S secante C D in L, erit D L æqualis semidiametro circuli cujus perimetri quartæ parti æqualis est radius A B. Sunt enim S B, A B, D L (propter similitudinem triangulorum S B A, A D L) continuè proportionales. Est autem S B ad A B ut quadrans perimetri ad radium. Quare & A B ad D L est ut quadrans perimetri ad radium, nempe D L.

Cor. 3. Sumpta in A D parte A M æquali rectæ D L, ductaq; R M, & producta ad B S incidet in C. Cum enim A D sit radius circuli cujus perimetri pars quarta est æqualis B S, & A M radius circuli cujus perimetri pars quarta est æqualis A B & rectæ omnes ductæ a puncto R secant B S, A D in ratione quartæ partis perimetri ad Radium, recta R M producta incidet in C.

Cap. XXI.

De Magnitudine Circuli Hugeniana.

DEterminationem hanc magnitudinis arcus BD tanta diligentia a Geometris omnis ævi summis quæsitam, quamq; veram esse tam manifestè modo demonstravi, quam manifestè ulla apud *Euclidem* propositio demonstrata est, Professores Mathematici, primò nostrates simul atq; apparuit, magno conatu irati oppugnaverunt, consentientibus etiam & laudantibus cæteris. Sed quibus armis, quibus innisi Principiis? Illis quæ supra ostendi esse absurda; nempe, *Si linea multiplicetur per numerum, Factum esse numerum quadratorum. Si a numero quadratorum extrahatur Radix quadrata, extractum esse numerum linearum. Si ex numero cuborum extrahatur Radix cubica, extractum numerum esse linearum. Punctum esse nihil; & lineam duci posse quæ nullam habeat latitudinem.*

Qui Propositionem hanc primus exhibuit, demonstravit illam juxta methodum Corollarii proximè præcedentis, hoc modo: Diviso arcu B G bifariam in *c*, duxit Sinum arcus *bc*, quem Sinum duplicavit producens ad *e*. Deinde ductum I G Sinum arcus B G bifariam secuit in *g*; junctasq; *c g*, *e* G productas supposuit ad latus B A productum. Et bisecando rursus arcum B *c* ductoq; Sinu ejus, & diviso I *g* bifariam, atq; eodem modo bisecando quamdiu quantitas bisecari potest, concludebat partes arcûs B G partibus Sinûs I G ubiq; esse proportionales. Id quod & verum est, & ab illo verè illatum. Sequitur autem inde (recta G *e* producta) ad B S in *i* rectam B *i* æqualem esse arcui B G; & proinde totam rectam B S æqualem esse arcui toti B D.

Hoc autem a dictis Professoribus impugnatum est partim ex Tabulis Sinuum, Tangentium, & Secantium, partim ab Authoritate Archimedis. Quoniam autem Tabulæ illæ constructæ sunt per multiplicationem Lineæ per numerum, cujus productum falsò computant pro numero quadratorum; & per extractionem radicum ex illis quadratis, quas radices falsò

computant pro numero linearum, argumentum ſumptum ex illis Tabulis vim refutandi nullam habent. Et quoniam Archimedes ipſe dimenſionem circuli ſuam demonſtrat per radicum extractionem, authoritas ejus in hac re valere non debet. Neq; mirum eſt, ſi per hujuſmodi calculum, recta *e* G producta cadere videatur in rectam B A productam, ultra vel citra punctum R.

Eandem hanc determinationem magnitudinis arcus B D impugnavit *Chriſtianus Hugenius* ex eo quod ipſe in Libro ſuo quem ediderat de Magnitudine Circuli, demonſtravit ut putat rectam compoſitam ex Radio & Tangente 30 graduum, qualis eſt B S, majorem eſſe arcu quadrantis B D.

CAP XX : 4

Deſcripto enim Segmento Circuli ſemicirculo minore A B C, & diviſo a perpendiculari F B biſariam in B; ſectiſq; rurſus arcubus A B, B C biſariam in D & E; ductiſq; eorum chordis C E, E B, B D, & D A; & Tangentibus C H, B H, B I, I A, & C K, K E, E L, L B, B M, M D, D O, O A; & deinceps biſecando quantum intelligi poteſt, demonſtrat (&

quidem quantum ego video) rectè segmenta C E C, E B E, B D B, D A D minora esse triangulis C K E, E L B, B M D, D O A. Quod autem idem infert, Si perpetua bisectione fierent infinita numero Segmenta, Illa quoq; simulsumpta minora fore omnibus triangulis, quæ Segmentis respondent simulsumptis, male infertur, nisi recta I B H sit extra circulum, ita ut punctum B non sit ambarum Linearum rectæ & curvæ commune sed inter utramque. Nam si B sit utriusq; lineæ commune, omnes illæ Tangentes numero infinitæ constituent ipsum arcum A B C. At si B sit extra circulum quamvis ipsi contiguum, chordæ A B, B C secabunt circulum non in eodem puncto in quo secatur a recta F B, sed utrobiq; citra ipsum. Docet enim *Euclides* (Prop. 2. Elem. 3.) rectam C B totam esse intra circulum, & (Prop. 16. El. 3.) Tangentem esse totam extra circulum. Itaq; nulla recta præter F B transire potest per arcum & tangentem ad idem punctum B, nempe ad punctum quod vocant *Contactus* nisi utriq; lineæ attribuatur latitudo aliqua.

Itaq; falsò usus principio hoc, *Punctum esse nihil*, post multas demonstrationes intulit, *Differentiam inter tertiam partem arcus quadrantis & chordam, ad differentiam inter chordam ejusdem tertiæ partis, & Sinum ejus* (sive Semiradium circuli) *majorem habere rationem quam* 4 *ad* 3; quod non parum confirmat id quod refutare voluit; quod autem intulit rectam compositam a Radio & Tangente 30 graduum majorem esse arcu quadrantis, deceptus fecit, eo quod putaret radium circuli non minorem esse quam quæ ab eodem centro ad Tangentem ducitur quæ est extra circulum. Consule ipsum illius librum cujus mihi exemplar dum hæc scribo deest; nec, si adesset, demonstrationes ejus commodè hic transcriberentur.

Cap. XXII.

De Sectione Anguli.

REvertere ad Diagramma Capitis xx.

In illo Diagrammate, sit datus arcus trisariam secandus B a.

A puncto

A puncto R ducatur recta Rα secans AD in β, & BC in γ. Secetur Bγ trifariam in δ & ε; ducanturque rectæ Rδ, & Rε secantes arcum Bα in η & ζ, & Aβ in θ & λ:

Dico arcum Bα divisum esse trifariam a duabus rectis Rη, Rζ.

Nam propter parallelas Bγ, Aβ, divisa est etiam Aβ trifariam in θ & λ ab iisdem rectis Rδ; Rε. Est autem Aβ ad totam AD ut arcus quadrantis descripti intervallo Aβ, ad arcum totum BD descriptum intervallo AD.

Etiam arcus quadrantis descripti a tertia parte arcus Aβ erit tertia pars Bα.

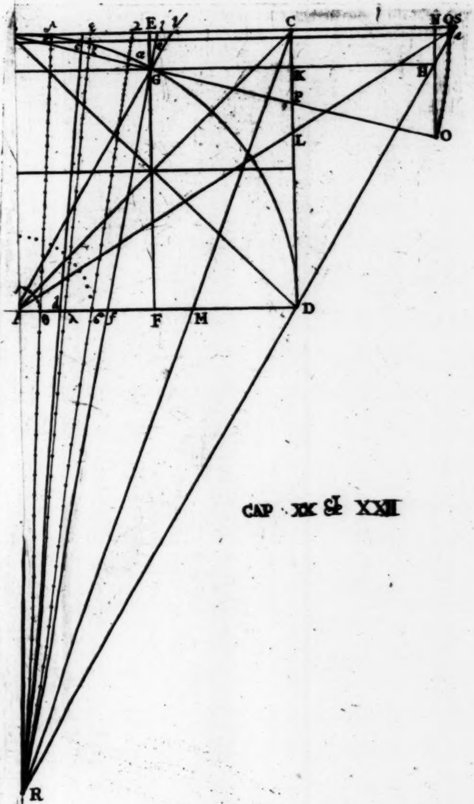
Arcus quadrantis descripti ab Aθ sit $\theta\mu$; arcus autem quadrantis descripti ab Aβ sit $\beta\nu$.

Non differunt ergo arcus duo $\beta\nu$ & Bα inter se longitudine, sed curvedine tantum, cum sit Bα, minus $\beta\gamma$ magis curva. Idem dicendum est de arcu $\theta\mu$ & cæteris omnibus arcubus descriptis super $\theta\lambda$, $\lambda\beta$ & cæteris arcubus qui adhuc describerentur super harum æqualibus partibus comparatis, cum partibus similibus circumferentiæ Bα.

Intellige jam puncta α & β admota esse in lineis AB & $\beta\alpha$ ad β et α, & proinde arcum $\beta\nu$ jacere in Bα. Congrueret ergo cum arcu ipso Bα, si modo omnia puncta θ, λ, & omnes partes harum æquales ferrentur simul in suis quæq; lineis ductis ab R donec pervenirent ad arcum Bα. Necesse enim esset si Aβ & Bα divisa essent in partes æquales in quot possibile est eas dividi, ut singulæ abscinderent partem arcus Bα æqualem quadranti super se descripto. Quare etiam recta Rθ abscindit ab arcu Bα tertiam partem arcus Bα nempe Bη; & Rλ duas tertias ejusdem.

Est ergo arcus Bα datus divisus trifariam a rectis Rδ, Rε. Eodem modo potest arcus non major quam arcus BG dividi quinquifariam vel in ratione quacunq; data. Sicut etiam arcus major quam BG si bisecetur donec pars ejus minor sit quam BG; nempe partem inventam duplicando toties quoties datus bisectus fuerat.

Angulum ergo in ratione data divisimus, & propterea etiam proportionem datam dividere docuimus in partes æquales quotcunq; requirentur. Idq; methodo brevi & perspicua.



CAP · XX & XXII

Cap. XXIII.

De Quantitate rectæ compositæ ex Radio Circuli & Tangente 30. graduum. Item, Dubitatio super Prop. 47ª. Elementi primi, &c.

QUadratum rectæ compositæ ex Radio Circuli & Tangente arcus 30 graduum, est ad quadratum a Radio, ut decem ad quatuor.

Sit Radius circuli A B, cujus quadratum sit A B C D. Ducatur arcuus B D, qui est quadrans circuli descripti ab A B.

Secetur quadratum A B C D in quatuor quadrata æqualia a rectis E F, G H secantibus se mutuò in I. Secet autem G H arcuum B D in K, jungaturq; recta A K, producaturq; ad B C in L, erit B L Tangens 30 graduum.

Rectæ B L adjiciatur in directum L M æqualis B C. Erit ergo tota B M composita ex B C Radio Circuli & C M Tangente 30 graduum.

In C M sumatur C N æqualis semiradio B G. Producatur A D ad *y*, ita ut A *y* sit æqualis B N; jungaturq; N *y* quam secet E F producta in P; jungaturq; B P secans G H in V.

Est ergo (per Prop.4. El. 1.) quadratum a B P decuplum quadrati ab N P. Est autem quadratum a Radio A B quadruplum, quadrati ab N P; & propterea quadratum a B P est ad quadratum ab A B ut 10 ad 4. Probandum ergo est, rectas B P, B M esse æquales.

Ducatur M Q parallela N P secans B P productam in Q, & E P productam in R. Erit ergo N M R P rectangulum. Ducatur a puncto M ad B P perpendicularis M O quæ producta incidat in E P ad S.

Sunt ergo triangula B N P, B O M Similia. Nam anguli ad N & O sunt recti æquales, & angulus ad B communis. Quare etiam anguli B M O, B P N sunt æquales.

Si jam rectæ M S, M Q sunt æquales, manifestum est æquales

les quoq; esse inter se tum RS, OQ, tum etiam MO, MR, & præterea BO, BN; & per consequens, quadratum a BM ad quadratum a BC ut 10 ad 4. Quod est propositum.

Sumatur in BM pars ipsius tertia Bα, quod fiet sumendo Gα tertiam partem rectæ GL. Radio autem Bα describatur arcus circuli secans rectam GV alicubi, & quidem (sensu judice) in ipso puncto V.

Rursus duplicato Bα, ut fiat Bβ duæ tertiæ rectæ BM; & radio Bβ describatur arcus circuli secans CD in γ; iterum (sensu judice) punctum γ erit in intersectione rectarum BP, CD. Postremò radio tota BM descriptus arcus circuli transibit per punctum P. Unde judicio sensuum tertia pars rectæ BP æqualis erit tertiæ parti rectæ BM, & proinde tota BP æqualis toti BM.

Sed hæc (inquies) non sensuum sed rationis judicio determinanda sunt. Rectè dicis; itaq; ne videar severitatem disciplinarum corrumpere velle, conabimur rem demonstrare.

In duobus triangulis similibus, si latus unum primi majus vel minus fuerit quam latus homologum secundi, etiam reliqua duo latera ejusdem primi majora vel minora erunt reliquis homologis secundi utrumq; utroq;. Id quod per se satis manifestum est.

In triangulo ergo MSR (cui simile est triangulum MQO) supponamus latus MS, latere sibi homologo MQ minus esse.

+ maius.

Erit ergo & MO ~~minus~~ quam MR.

Rursus quia MS minus est quam MQ latus sibi homologum, erit & RS (trianguli MSR) minus quam latus sibi homologum QO. Sed latus RS æquale est tertiæ parti semiradii BG, quia triangulorum similium BGV, MRS latera homologa BG, MR sunt semiradii æquales, & latus GV tertia pars semiradii BG. Minor autem est RS quam OQ.

Est ergo OQ major quam tertia pars semiradii MR.

Sed OQ est tertia pars (ut supra ostensum est rectæ MO. Major ergo est MO quam semiradius, id est quam MR. Sed ex eo quod suppositum est minorem esse MS quam MQ, illatum

illatum eſt, majorem eſſe MO quam MR. Falſum ergo eſt MS minorem eſſe quam MQ.

Eadem methodo demonſtrari poteſt eandem MS majorem non eſſe quam MQ.

Probat nihil nam illatum est in [illegible] maiorem esse MO quam M[illegible] et nunc nil nisi idem probatur

Sunt ergo MS, MQ æquales.

Eſt autem MQ æqualis tertiæ parti BM. Eſt autem MS (propter triangula BGV, MRS æqualia & ſimilia) æqualis BV tertiæ parti BP. Itaq; BM, BP ſunt æquales; & quadratum a BM ad quadratum a BC ut 10 ad 4. Quod erat demonſtrandum. Nec in veritate Theorematis ſenſus & ratio diſſentiunt.

Corollarium hinc oritur manifeſtum, rectas BN, BO, ut & OP, PR, item PS, PQ eſſe inter ſe æquales; & eſſe BQ, BP, BO id eſt B*e* (facta æquali BQ) BM, BN continuè proportionales, & NO, MP eſſe parallelas; & angulos NOP, OMP, NPM, PMR eſſe omnes inter ſe æquales; & deniq; facto angulo NM*n* æquali angulo OPS, parallelas eſſe BP, MN æquè altas.

Ex propoſitione hac modò demonſtrata ſequitur Theorema novum circa dimenſionem circuli, nempe hoc, *Arcum quadrantis deſcripti ſemidiametro BM æqualem eſſe quinq; ſemiradiis; arcum autem quadrantis cujuſdam qui ſit æqualis rectæ AB deſcriptum eſſe a ſemidiametro quæ eſt media proportionalis inter AB ſive CD, & ejuſdem duas quintas.*

Secetur enim AD (quæ æqualis eſt Radio) in quinq; partes æquales, quibus adjiciantur in directum aliæ duæ quintæ D*a*, *ab*. Diviſa autem A*b* bifariam in *c* deſcribatur ſemicirculus ſecans CD in *d*. Eſt ergo ut $\frac{2}{5}$ Radii AD ad D*d*, ita D*d*, ad Radium AB. Sed ut $\frac{2}{5}$ Radii AB ad mediam B*d*, ita ſunt duo ſemiradii, id eſt AB, ad mediam inter AB & quinq; ſemiradios. Eſt autem BM (ut modo demonſtratum eſt) media inter AB & quinq; ſemiradios. Sunt ergo D*b*, D*d*, DC, BM & quintuplus ſemiradius continuè proportionales. Ducta ergo A*d* & producta incidet in M, propterea quod eſt ut MB ad BA, ita BA id eſt AD ad D*d*. Quoniam ergo demonſtratum eſt Cap. xx. & defenſum Cap. xxi. contra Hugenium (qui problema hoc profundiſſi-

mè contemplatus, & ex Principiis Euclidis accuratissimè ratiocinatus est) rectam B M æqualem esse arcui B D, eandemq; modo ostendi æqualem esse Mediæ inter A B & quinq; semisses ejusdem A B, sequitur (propterea quod A B est radius quadrantis æqualis rectæ B M) rectam D *d* esse Radium quadrantis æqualis A B; & duas quintas Radii A B, nempe D *b*, esse Radium quadrantis D *d*; & deniq; rectam B M esse Radium quadrantis æqualis quintuplæ C N, id est quintuplo semiradio. Unde exsurgit etiam, Rectam D *d* æqualem esse duabus quintis arcus B D. Quæ omnia vidit quidem & edidit Josephus Scaliger, sed cum non rectè demonstrasset, damnavit ipse (nil dubitans de Principiis Euclidis) sed postquam fuisset convitiis Clavii acerbissimis oneratus.

Consideremus nunc eadem hæc in Numeris. Ad B M adjiciatur M *e* æqualis P Q; eritq; N *e* æqualis O Q, id est G V, id est tertiæ parti semiradii B G; semissis autem rectæ N *e* (qui sit N *r*) erit sexta pars ejusdem B G.

Erit ergo quadratum a B G æquale 36 quadratis ab N *r*. Est autem recta B N octodecupla ipsius N *r*, & proinde quadratum ejus æquale 324 quadratis ab eadem N *r*. Est autem B *e* vigecupla ejusdem N *r*, & proinde quadratum ejus æquale 4000. quadratis ab eadem N *r*.

Est autem B *r* æqualis novemdecem rectis N *r*; & quadratum ejus æquale 361 quadratis ab eadem N *r*. Majus ergo est quadratum rectæ B *r*. quam quadratum rectæ BP sive BM. Quadratum enim a B P æquale est tantummodo 360 quadratis ad N *r*.

Inter quadrata a B *e*, & B M, id est inter 400 & 324 sumatur numerus medius proportionalis (cadit enim inter quoslibet duos numeros quadratos unus medius proportionalis) eritq; ille numerus medius 360, nempe tot quadrata a sexta parte B G, quot sunt æqualia decem quadratis a semiradio toto B G. Itaq; si Gnomon circumponi intelligatur quadrato a BM, cujus Gnomonis latitudo sit M *r*, Gnomon ille æqualis erit quadrato ab N *r* sexta parte semiradii. Hactenus nulla causa est dubitandi de Prop. 47. El. 1.

Rursus quadratum a C N æquale est 36 quadratis ab N *r*. Est autem C *e* octupla ipsius N *r*, & quadratum ejus æquale

64 quadratis

64 quadratis ab eadem N*r*. Et quia C*r* ſeptupla eſt ipſius N*r*, quadratum ejus æquale erit 49 quadratis ab eadem N*r*.

Jam cum CM Tangens ſit 30 graduum, erit quadratum ejus (ſecundum Prop. 47. El. 1.) æquale 48 quadratis ab N*r*. Eſt enim AL ſecans 30 graduum dupla Tangentis BL, ſive CM, & AB radius duplus ſemiradii BG. Cum ergo quadratum ab AL ſit ad quadratum a BL ut 4 ad 1, erit ad quadratum ab AB ut 4 ad 3. Quare etiam quadratum Tangentis BL erit ad quadratum ſemiradii BG ut 4 ad 3 ſive 48 ad 36. Sed quia quadratum a BG ſive CN eſt 36, erit quadratum a BL, ſive CM (ſecundum Euclidem) æquale 48 quadratis ab N*r*. Eſt autem quadratum a C*r* 49, quare ſi Gnomon cujus latitudo ſit M*r* circumponeretur quadrato a CM, eſſet ille Gnomon æqualis quadrato ipſius N*r*. Sed oſtenſum eſt quod Gnomon cujus latitudo ſit M*r* circumpoſitus quadrato a BM æqualis eſt quadrato ab eadem N*r*. Non eſt ergo quadratum a Tangente 30 graduum ad quadratum a Semiradio ut 4 ad 3. Quod eſt contra Prop. 4. El. 1. Non videtur ergo propoſitio illa univerſaliter vera, ſed dubitans nil pronuntio.

Error eſt, inquies, aliquis vel in illa, vel in hac demonſtratione. Certiſſimè. Incumbe igitur toto animo utriuſq; examinationi; nec ratiocinationes tantum ſed etiam Principia excute. Inprimis autem cave ne tenuiſſima triangula vel ſectores quantuloſcunq; computes pro lineis rectis, aut parallelogramma obliquangula exigua pro rectangulis. Id quod evitare non poteſt is qui rectangulum non quadratum ſectum putet a linea per angulos oppoſitos bifariam, ut eſt in Propoſitione 34 El. 1. quanquam enim in quadrato diagonalis conſiderari poteſt ut mera longitudo, atq; etiam ut minutiſſimum rectangulum, quia dividit oppoſitos angulos bifariam; in oblongo tamen ubi diagonalis non dividit oppoſitos angulos bifariam conſiderari non poteſt neq; ut rectangulum neq; ut mera longitudo ſed ut vel triangulum obliquangulum, vel parallelogrammum obliquangulum. Sed ut hanc difficultatem facilius examinare poſſis, oſtendam tibi nunc quanto juxta *Euclidem* quadratum a Tangente 30 graduum majus eſt, quam quadratum a ſemiradio.

Dico autem quadratum a Tangente 30. graduum nimirum quadratum a C M æquale esse quadrato a C N una cum tertia ipsius parte & duobus quadratis ab N M sive P R. Tangentis & Semiradii differentia, si vera sit Prop. 47. El. primi.

Super C M constituatur quadratum C M Y X. Item super B M constituatur quadratum B M Z *f*. Etiam super C N constituatur quadratum B N *g k*. Erit ergo tum P Y, tum *g* Z quadratum differentiæ inter C M Tangentem 30. grad. & semiradium C N.

Constat autem quadratum N *h* æquale est novem quadratis a Semiradio C N. Quod autem quadratum B *f* æquale est decem quadratis a C N supra demonstratum est.

Est ergo Gnomon qui quadrato N *h* appositus est æqualis quadrato N F. Differentia autem inter quadratum M X & N F est Gnomon constans ex duplo rectangulo M P & quadrato P Y, cui æquale est quadratum *g* Z.

Gnomon autem qui adjectus est quadrato N *h* æqualis est sextuplo rectangulo M P una cum quadrato *g* Z. Est autem Gnomon ille æqualis quadrato Semiradii. Minus ergo est quadratum Semiradii quam quadratum Tangentis 30 grad. tertia sui & præterea tanto quantum est duplum quadratum a P Y vel *g* Z.

Excessus ergo quadrati Tangentis 30 graduum supra quadratum Semiradii majus est quam tertia pars quadrati Semiradii, tanto quantum est duplum quadratum P Y. Quod est contra Prop. 47. El. 1.

Error autem hic in quadratis ipsis, ut vides, satis est sensibilis, etsi in lateribus non tam facile apparet. Apparebit autem si ad $\frac{2}{3}$ rectæ B G addideris in directum Radium totum, sive $\frac{12}{6}$, atq; inter illas mediam inveneris proportionalem. Nam erit illa quidem non valdè diversa a Tangente, sed tamen si cum diligentia operabere media illa minor erit quam Tangens 30 grad. nimirum quam B L; est tamen illa media, latus verum, quadrati æqualis 48 quadratis a sexta parte B G, nimirum ab N *r*.

Verum error ille an magnus an parvus sit, nihil hic refert. Nam etsi nullus esset, cum tamen propositio illa (propter

Principia quibus innititur, quæ sunt ut suprà ostendi dubiæ fidei etiam ipsa dubia est. Itaquè temerè dictum est a Clavio ad Prop. 16. El. 3. contra Pelletarium, *Geometricas* (id est Geometrarum) *demonstrationes ejusmodi esse ut consensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam sinant aucipiti opinione distrahi, sic, ut tum assentiatur si velit, tum si nolit dissentiat.*

Si circulus vel triangulum sectum fuerit in quatuor partes, quæ partes dispersæ essent, una ad Indos Orientales, altera ad Indos Occidentales, tertia ad Polum Arcticum, quarta ad Antarcticum, putasne esse demonstrationem Geometricam aliquam quæ me cogere posset ut credam, puncta eorum verticalia non esse quatuor puncta, sed unum idemq; punctum. Item si quid moveatur motu æquabili per Minus & Majus spatium, extorquebitne demonstratio ulla ut credam quod non transeat per æquale, aut ut credam vera esse quæ supra ostendi esse absurda.

Si mea hæc rectè demonstrata sunt, animadvertenda tibi præterea sunt, primo, maximam partem propositionum quæ dependent a 47^{a}. El. 1. (sunt autem multæ) nondum esse demonstratam.

Secundo. Tabulas Sinuum, Tangentium, & Secantium egregiè falsas esse; propterea quod calculus eorum dependet a veritate horum duorum Assumptorum, 1. *Radix numeri quadratorum non est numerus quadratorum sed linearum.* 2. *Numerum Linearum per numerum (simpliciter) multiplicatum facere numerum quadratorum.* Cum enim quadratum a recta composita ex Radio & Tangente 30 grad. æquale sit decem quadratis a semiradio; si ponatur Semiradius 5000, erunt tres Semiradii 15000 pro B N. Quadratum autem a Semiradio est 25000000, & quadratum a B N 225000000 quæ duo quadrata simul sumpta sunt 250000000, cui æquale est quadratum a B M composita ex Radio & Tangente 30 grad. Radix autem numeri 250000000 est $15811\frac{--}{}$----quarum partium Radius est 10000. Relinquitur ergo pro Tangente 30 grad. 5811----proximè. Est autem in Tabulis Tangentium pro ejus quantitate positus numerus 5773^{2--12}, qui est error momenti satis magni in calculi,

culis Astronomicis, & in calculo triangulorum quo utuntur Agrimensores. Iisdem principiis quæ ostendi supra esse falsa attribuere potes, quod quantitas circuli a magnis ingeniis omni ævo, quæsitum, inveniri tamen non potuerit. Quis enim præjudicium Archimedis non vereretur? Etsi liber ejus de Dimensione circuli non mihi videatur ab ipso editus; continet enim tres tantum propositiones, nec eas ordine quo oportuit dispositos, nec sicut alii ejus libri ad quenquam qui eos consideraret missus, sed ut cui nondum manum ultimam imposuerat apud se retentus, ab aliis Geometriæ minùs peritis post mortem ejus editus.

Doctrina autem & ipsa nomina Sinuum, Tangentium & Secantium calamitas Geometriæ nupera est. Qui subtensas & semisubtensas quæ nunc vocantur dimidiatorum arcuum Sinus, calculo primus subjecit fuit Ptolomæus. Sinum nusquam Scriptum invenio ante Regiomontanum, qui verò Tabulas Sinuum, Tangentium, & Secantium quibus utimur primus condidit fuit Clavius.

Secundo, notatu dignum est, causam quod Quadratura circuli, divisio Rationis, aliaq; pulcherrima, sed difficillima Geometriæ problemata tam diu latuerunt, in illis ipsis esse demonstrationibus quas cogentes esse prædicant. Primi omnium Arabes invenerunt quadratum quadrantis perimetri decuplum esse quadrati a Semiradio; quod etsi verissimum sit, confutavit per extractionem Radicum Johannes Regiomontanus (qui idem esse putavit quadrati latus & numeri quadrati Radicem) Audi ipsum Regiomontanum, *Arabes olim circulum quadrare polliciti ubi circumferentiæ suæ æqualem rectam descripsissent, hanc pronuntiavere sententiam, Si circuli diameter fuerit ut unum, circumferentia ejus erit ut Radix de Decem. Quæ sententia cum sit erronea, quemadmodum alibi explanavimus, cumq; numeros introducat rectilineationem effecturos, numeri ipsi in hoc negotio sunt suspecti.* Olim ergo, ut vides, magnitudo circuli cognita fuisset, nisi obstitissent quæ a Geometris nunc Cogentia appellantur. Iterum doctrina hæc Arabum apparuit a Scaligero, atq; iterum disparuit expulsa exorcismo conviciorum a Clavio. Sed tertium nunc apparens, docta jam exorcismos &

convitia contemnere, nunquam puto abigetur.

Notabis præterea convitiorum causas. Quod Scaligerum Clavius, Orontium & Longomontanum alii, convitiati sunt, quæ causa esse potuit? Quo læsi fecerunt? Paralogismus meus damnum tuum non est. Unde igitur iræ tantæ? An a zelo boni communis, nimirum ne corrumperetur paulatim Mathematica? Utinam quidem illis omnibus cura Boni communis tanta esset, ut nihil omnino in libris falsi paterentur esse sine confutatione. Sed ita est homo, nisi præcepta vera Philosophiæ moralis antè didicerit, ut famam aut lucrum primariò, Veritatem secundariò appetat. Inde est quod irascantur illis quorum industria nimia veritatis lux infertur, qua patescat omnibus quantuli viri sunt qui volunt haberi maximi. Ego aliqua quidem in *Euclide* reprehendi, non tamen ut illum non putem magni faciendum esse, qui Scientiarum Mathematicarum tradendarum methodum primus tradidit. Nihil ab Archimede editum non laudo. Consilium mihi aliud non est quam Arithmeticæ & Algebræ in demonstrandis Propositionibus purè Geometricis abusum tollere, si potuero. Vale.

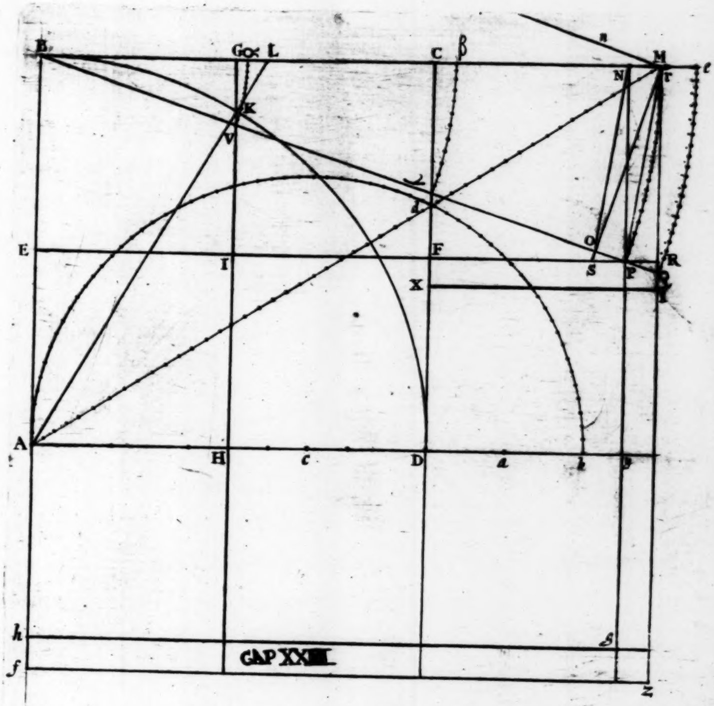
FINIS.

---

vitia contemnere, nunquam puto abigetur.

Notabis præterea conviciorum causas. Quod Scaligerum Clavius, Orontium & Longomontanum alii conviciati sunt, quæ causa esse potuit? Quo læsi fecerunt? Paralogismus meus damnum tuum non est. Unde igitur iræ tantæ? An a zelo boni communis, nimirum ne corrumperetur paulatim Mathematica? Utinam quidem in illis omnibus cura Boni communis tanta esset, ut nihil omnino in libris falsi paterentur esse sine confutatione. Sed ita est homo, nisi præcepta veræ Philosophiæ moralis antè didicerit, ut famam aut lucrum primariò, Veritatem secundariò appetat. Inde est quod irascantur illis quorum industria nimia veritatis lux infertur, qua patefiat omnibus quanti viri sunt qui volunt haberi maximi. Ego aliqua quidem in *Euclide* reprehendi, non tamen ut illum non putem magni faciendum esse, qui Scientiarum Mathematicarum tradendarum methodum primus tradidit. Nihil ab Archimede editum non laudo. Consilium mihi aliud non est quam Arithmetice & Algebræ in demonstrandis Propositionibus purè Geometricis abusum tollere, si potuero. Vale.

FINIS.



CAP XXIII

Appendix.

Cum in fine Capitis 22 Ex data Anguli omnimoda, ſectione, Diviſionem etiam Rationis omnimodam inveniri præſumpſerim, id nunc qui fiat oſtenſurus ſum.

De Mediis Proportionalibus in genere.

Inter duas rectas datas invenire Medias Proportionales quotcunq;.

SInt primo inveniendæ duæ Mediæ inter datas (in fig. 1.) quaſcunq; A B majorem, & A V minorem.

Fiat ab A B quadratum A B C D; & in lateribus A B, A D, ſumantur A E, A F, utraq; æqualis A V.

Inter A B & A E inveniatur media A *a*; cui æqualis in latere A D ſumatur A *b*, ducaturq; *a b*, quam ducta diagonalis A C neceſſariò ſecabit bifariam, & ad angulos rectos in *d*.

Ducatur etiam diagonalis B D ſecans A C in N. Itaq; A C, B D ſecabunt ſe mutuò bifariam, & ad angulos rectos in N.

Jungantur D *a*, *b* E, ducaturq; E F ſecans A C in *o*; eruntq; A N, A *d*, A *o* continuè proportionales, in eadem ratione cum rectis A B, A *a*, A E, ſive A D, A *b*, A F, & rectæ B D, *a b*, E F continuè proportionales.

Centro N radio N B deſcribatur arcus circuli B G ſecans

D*a* productam in G; item centro *d*, radio *d a*, describatur arcus circuli *ag* secans *b* E productam in *g*, ducaturq; *dg*.

Quoniam ergo est ut AD ad A*a*, ita A*a* id est A*b*, ad AE, erunt D*a*, *b*E parallelæ, & anguli BD*a*, D*ab*, *ab* E æquales; & per consequens anguli BNG, *adg*, (dupli angulorum BD*a*, *abg*) inter se æquales.

Secetur arcus BG in tres partes æquales, quarum BH sint duæ; jungaturq; DH secans latus AB in I. Ducta ergo NH, erit angulus BNH duplus anguli BDH, id est duplus anguli BDI.

Rectæ AI sumatur (in latere AD) æqualis AK, ducaturq; BK.

Quoniam igitur æquales inter se sunt tam AB, AD quam AI, AK, erunt quoq; inter se æquales DI, BK & secabunt se mutuò in diagonali AC ad P; eruntq; tum DP, PB, tum KP, PI æquales; & ducta IK erit parallela rectis BD, *ab*, EF. Quatuor denique anguli BDI, DBK, DIK, BKI erunt æquales, & eorum quilibet æqualis duabus tertiis anguli BD*a*.

Similiter secetur arcus *ag* in tres partes æquales, quarum *gh*, sint duæ, & *ha* una, jungaturq; *dh* secans AB in M, & ducatur *b*M. Angulus ergo *adh* in centro, qui (idem est cum angulo *ad*M) duplus est anguli *ab*M in circumferentia.

Rectæ AM sumatur (in latere AD) æqualis AL. Jungatur *d*L; quæ erit ipsi *d*M æqualis. Ducatur *a*L. Cum autem (propter tum A*a*, A*b*, tum AM, AL æquales) æquales quoq; sint *a*L, *b*M, illæ secabunt se mutuò in diagonali AC ad *e*; eruntq; anguli *ba*L, *ab*M æquales.

Ducatur ML; quæ (propter AL, AM æquales) erit rectæ *ab* parallela. Quia autem *b*M, *a*L secant se mutuò in *e*, erunt quatuor anguli *ab*M, *ba*L, *b*ML, *a*LM æquales, & quilibet eorum semissis anguli *ad*M, & duo anguli *a*LM, *b*ML, id est totus angulus *d*ML, sive ipsi æqualis *d*LM æqualis tertiæ parti anguli *adg*, id est æqualis duabus tertiis anguli *ab*E, sive anguli BD*a*, id est æqualis angulo

BKI

BKI vel DIK, Et quia rectæ $a\,b$, ML sunt parallelæ, erit etiam angulus $a\,d$ M æqualis eidem angulo DIK sive BKI.

Producatur Ld utcunq; ad f. Erit ergo angulus $f\,d$M externus æqualis ambobus simul angulis internis dLM, dML, Angulus ergo $f\,d$M duplus est anguli $a\,d$M, dividiturq; angulus $f\,d$M a recta $d\,a$ bifariam. Ducatur Pm dividens angulum BPI bifariam, & secans AB in m. Cum igitur angulus BPI duplus sit anguli PKI, erit angulus mPI æqualis angulo $f\,d\,a$, & angulus mPd rectus; & rectæ Pm, $d\,a$ parallelæ, & proinde anguli IPd, $f\,d$P æquales. Quoniam igitur IK secat Pd ad angulos rectos, producta Lf incidet in I. Similiter ostendi potest rectam Md productam transire per K.

Est ergo quadrilaterum IPKdI Rhombus.

Jungantur MF & LE, quæ quia sunt æquales secabunt se mutuò in diagonali ad n. Et parallelæ sunt tum Da, bE, tum DB, ML; tum etiam IK, EF; erit ergo angulus bEL æqualis angulo IDa; & anguli LEF, LMF æquales duobus angulis BDI, DBK, id est duobus augulis ILM, KML uterq; utriq;.

Est ergo quadrilaterum Md LnM Rhombus.

Sunt ergo PB, dI, nM, nE continuè proportionales.

Sed ut PB ad PI, id est ad PK, ita est AB ad AK, id est ad AI propterea quod recta AP dividit angulum BAK bifariam. Item ut dI ad nM id est ad dL, ita est AI ad AL sive ad AM; quia Ad dividit angulum IAL bifariam. Item ut nM ad nE, id est ad Fn, ita est AM ad AF sive AE; quia An dividit angulum MAF bifariam.

Sunt ergo rectæ AB, AI, AM, AE continuè proportionales, & AI, AM; sive AK, AL Mediæ quæsitæ.

Rursus inter datas quascunq; AB, AV inveniendæ sint quatuor Mediæ. Fiat ab AB (fig. 2.) quadratum ABCD, sumanturq; in lateribus AB, AD partes AE, AF utraq; æqualis minori AV; sumatur autem inter AB, AE media Aa, cui (in latere AD) sumatur æqualis Ab, junganturq; Da, & bE, ducanturq; DB, $a\,b$, bE, EF. Ducatur etiam diagonalis AC secans

D B, *a b*, E F, in N, *d*, *o*. Deinde centro N, radio N B describatur arcus circuli ſecans D *a* productam in G. Secetur autem arcus B G in quinq; partes æquales, quarum B H ſint duæ, B Q quatuor.

Item centro *d*, radio *d a*, deſcribatur arcus circuli *a g* ſecans *b* E productam in *g* ſeceturq; arcus *g a* in quinq; partes æquales quarum *g h* ſint duæ, & *g q* quatuor.

Ducatur D H ſecans A B in R. Et in latere A D, ſumatur A S æqualis A R. Ducanturq; B S, R S; eruntq; D R, B S æquales; & propterea ſecabunt ſe mutuò in diagonali A C ad T, & erunt D B, R S parallelæ; & quatuor anguli N B T, N D T, T R S, T S R æquales, & quilibet eorum æqualis duabus quintis anguli B D G.

A puncto S ducatur S X parallela D R, & a puncto R ducatur R Y parallela B S. Erunt ergo S X, R Y æquales, & ſecabunt ſe mutuò in diagonali ad Z. Itaq; quadrilaterum S T R Z S erit Rhombus, junctaq; X Y erit parallela rectis D B, R S, & *a b*; & utervis angulorum Z X Y, Z Y X æqualis erit angulo B D R, id eſt duabus quintis anguli B D G.

Ducatur *d q* ſecans A B in M, ducatur etiam *b* M, eritq; angulus *a b* M ſemiſſis anguli *a d* M. In latere A D ſumatur A L æqualis A M, junganturq; M L & *a* L. Itaq; *b* M, a L, ſecabunt ſe mutuò (cum ſint æquales) in diagonali A C ad *e*. Quare ambo ſimul anguli *d* M L, *e* M L, ſunt æquales angulo Z X Y.

Et quia *a d*, M L ſunt parallelæ, erit angulus *a d* M æqualis angulo *d* M L, id eſt angulo Z X Y. Jungatur L *d* (quæ æqualis eſt *d* M) & producatur utcunq; ad *f*. Erit ergo angulus *f d* M duplus anguli *a d* M, id eſt æqualis angulo B T R ſive D T S, ſive Y Z S, ſive R Z X. Eſt ergo recta L *f* rectis B S, Z R parallela, & recta *d* M rectis D R, S X parallela. Sunt autem anguli *a d f*, Z X Y æquales, & tum *a b* tum X Y ſecat A C ad angulos rectos. Sunt ergo anguli *f d* Z, X Z *d* æquales. Quare recta L *f* (quæ tranſit per *d*) incidet producta in X; & propter eandem rationem producta M *d* incidet in Y. Eſt ergo quadrilaterum Y Z X *d* Y Rhombus.

A

A puncto M ducatur recta M I parallela L X secans A D in I; item a puncto L ducatur recta L K parallela Y M secans A D in K; quæ duæ M I, L K, cum sint æquales, secabunt se mutuò in diagonali A C ad *m*; quia autem LM secat eandem diagonalem ad angulos rectos, & sunt tum *d* L, *m* M, tum *d* M, *m* L parallelæ, erit quadrilaterum L *d* M *m* L Rhombus.

Postremò jungantur I E, K F quæ (cum sint æquales) secabunt se mutuò in diagonali ad *n*. Quoniam ergo tum I K, D B, tum E F, S R, tum *b* E, D *a* sunt parallelæ, & tam I E, K F, quam B S, D R secant se mutuò in diagonali A C, erunt anguli *n* I K, *n* K I, *n* E F, *n* F E æquales tum inter se, tum angulis T B N, T D N, T R S, T S R & recta F K parallela rectis B S, R Y, X L, M I, sicut & I E parallela rectis D R, S X, Y M, L K.

Est ergo quadrilaterum I *m* K *n* I Rhombus. Quare B T, R Z, X *d*, M *m*, K *n* sunt continuè proportionales; & propter angulum B A S, R A Y, X A L, M A I divisum ab A N bifariam, erunt (per Eucl. 6. 2.) rectæ A B, A R, A X, A M, A K, A E, sicut & A D, A S, A Y, A L, A I, A F continuè proportionales. Itaq; inter duas A B, A V datas inventæ sunt quatuor Mediæ A R, A X, A M, A K, sive A S, A Y, A L, A I.

Ad Mediarum numerum omnem demonstrationes applicare singulas impossibile est. Manifestum autem est, quod, si arcus B G secetur septifariam, inveniri sex Rhombos latera habentes totidem continuè proportionalia, & consequenter sex Medias; quemadmodum ex trisectione inventæ sunt duæ Mediæ, & ex quinquisectione quatuor Mediæ; atq; ita in infinitum pro Mediis numero paribus. Datis autem paribus, omnis Mediarum numerus impar facile innotescit per sumptionem inter singulas proportionales singularum Mediarum. Invenimus ergo Methodum generalem inveniendi inter duas rectas datas Medias quotcunq; per sectionem anguli; quomodo autem angulus in ratione data quacunq; secandus sit docuimus suprà Cap. 22.

Hæc quanquam certa & demonstrata, corruerent tamen si

verum

verum esset, quod Algebristæ nostri dicunt, Radicem numeri quadrati, & figuræ quadratæ latus idem esse.

Examinabimus jam Logicæ quam illi jactitant severitatem.

Vitiosam esse aiunt demonstrationem in quam non ingreditur omne id quod ad constructionem assumitur. Ego contrà, demonstrationem in qua neque propositionem, neq; consequentiam ullam falsam reperio, peccatorum omnium contra Logicam absolvendam censeo. Neque illorum regulam illam utcunque speciosam legisse me memini in Aristotele, neque in alio scriptore logico.

Exhibenda mihi igitur est demonstratio legitima, ubi assumptum aliquod ad constructionem non tamen adhibetur ad demonstrationem. Demonstrabo autem absque trisectione anguli inter rectam datam & ipsius semissem quænam sint Mediæ duæ proportionales.

Sint datæ (fig. 3.) duæ rectæ A D, D V facientes unam rectam A V. Sit autem D V semissis ipsius A D, fiatque a majore A D quadratum A B C D. Inter A D & D V inveniatur Media proportionalis D E, cui in lateribus B C, A D ponatur æqualis A O, & B R; jungaturque R O, & producatur.

Secetur D O bifariam in K; centro autem K intervallo K V describatur circulus V I M X secans C D in X, A D in M, & R O productam in I. Quoniam ergo R O, C D sunt parallelæ, anguli deinceps ad O & D sunt recti, & D K, K O æquales, & proinde etiam O M, D V æquales. Æquales item sunt I K, K X; & I X diameter circuli V I M X, eademque æqualis rectæ M V. Itaque ductis rectis VX, XM, MI, I V erit V I M X rectangulum; & tres rectæ D M, D X, D V continuè proportionales. Divisis autem M X, I V bifariam in Z & L, ducta Z L transibit per K, & secabit tum M X tum I V ad angulos rectos.

In recta I K sumatur I P æqualis D V, erit ergo reliqua P X æqualis D M, & P K æqualis D K; item L K secabit angulum D K P bifariam.

Producatur C D in G (secans K L in S) ita ut D G, C D sint æquales.

A puncto P ducatur recta P Y perpendicularis rectæ I P, æqualis autem D G junganturq; Y I, G V.

Quoniam ergo I P est æqualis D V, & P Y æqualis D G, & anguli ad P & D recti, erunt Y I, G V æquales, & divisâ Y I bifariam in H, circulus descriptus radio H I transibit per P & Y.

Producta autem Y P transibit per M, eritque P M æqualis D X. Cum enim I P, D V sint æquales, & I M, V X æquales & parallelæ, & in triangulis I P M, X D V anguli ad P & D recti, erunt quoq; P M, D X æquales. Similiter quia O M, est æqualis D V, & M I, X V æquales & parallelæ, erit O I æqualis eidem D X, & tota Y M æqualis toti G X.

Secent autem se mutuo P M & O I in Q. Æquales ergo inter se sunt Q I & Q M, æquales item anguli Q M I, Q I M; item anguli O M P, O I P cum æquales sint tum K P, K O, tum K I, K M, tum etiam O Q, P Q, & angulus P M I æqualis angulo D X V, & angulus P I M æqualis X V D, propter similitudinem triangulorum P M I, D X V, & angulus P Q I externus duplus anguli interni P M I vel P I M.

Quoniam autem O Q, D S sunt parallelæ, transibit M Y per S. Est enim angulus K S D æqualis angulo D X V propter K S, X V parallelas; est autem angulus M Q I ejusdem anguli D X V sive K S D duplus. Ubicunque ergo M Y secat D G faciet cum illa angulum anguli K S D duplum. Cum enim anguli ad P & D sint recti, & anguli ad K æquales, atque etiam rectæ D K, K P æquales; producta M P donec concurrat cum K L, faciet cum illa angulum æqualem angulo K S D; id quod fieri potest in unico puncto rectæ K L, nempe S. Quare recta K L dividit angulum P S D, simulque verticalem ipsius Y S G bifariam.

Quia vero æquales inter se sunt tum G D, Y P, tum D S, P S, æquales quoque erunt rectæ G S & Y S. Ducta ergo G Y secabitur a K L productâ bifariam & ad angulos rectos in T.

Cum autem in triangulis T Y S, D X V, anguli ad T & D sint recti, & anguli ad S & X æquales, erit angulus T Y S æqualis angulo X V D.

Jungantur

Jungantur HS, HP, HD. Quoniam ergo in triangulis HPS, HDS, latera PS, DS sunt æqualia, & latus HS commune, erunt quoque latera HP, HD æqualia; & anguli HPS, PHS æquales angulis HDS, DHS uterque utrique. Circulus ergo descriptus radio HP (qui transit per I & Y) transibit etiam per D.

Etiam quia rectæ DK, KP, ut & anguli ad K æquales sunt transibit HS per K; & proinde secabit IV. bifariam & ad angulos rectos in L. Itaque triangula rectangula ILH, VLH sunt æqualia & similia. Quare rectæ IH, HV sunt æquales.

Dividitur ergo recta GH bifariam in H, & circulus descriptus radio HP transit per puncta G, I, P, D, V, Y. Est ergo angulus GYV in semicirculo.

Est igitur tum IGYV, tum GMXY, tum etiam (ut antè ostensum est) IMXV rectangulum.

Itaque triangula rectangula GDM, MDX, XDV similia sunt; & propterea quatuor rectæ DG, DM, DX, DV continuè proportionales, quarum DM, DX sunt Mediæ quæsitæ. Item OR, OV, OI, OM continuè proportionales, quarum OV, OI sunt Mediæ quæsitæ. Item PY, PX, PM, PI continuè proportionales, quarum PX, PM sunt Mediæ quæsitæ.

Cor. Quoniam YX, GM sunt parallelæ & æquales, item GM, VR parallelæ & æquales erunt rectæ VY & XR æquales.

Idem demonstrari potest ex eo ipso, quod recta DE est media proportionalis inter AD & ipsius semissem DV, hoc modo.

Quoniam DC, DE, DF (sive DV) sunt continuè proportionales, erit ut DC ad DE, ita differentia CE ad differentiam EF. Quare ratio DC ad DF duplicata est rationis CE ad EF. Et quia DE est diagonalis quadrati a DF id est quadrati DF*rg*, erit CE diagonalis quadrati ab EF, id est quadrati C$\gamma\mu$*h*; cum sint tum EF, C*h*, tum *h*F, CE æquales.

Quoniam autem est ut DC ad DF ita AC ad A*r*, erit quoque

quoque ratio AC ad A*r* duplicata rationis CE ad C*b*.

Cum autem C$\gamma\mu$*b* ſit quadratum tranſibi: AC per ν. Ducta ergo $\mu\pi$ parallela CD, erit ut Cμ ad C*b*, ita DC ad $\mu\pi$ id eſt ad D*b*. Eſt ergo ratio AC ad A*r*, id eſt ratio DC ad DF duplicata rationis DC ad D*b*. Quare (cum D*b*, DM ſint æquales, & DX media proportionalis inter D*b* & DF) erit ut DC ad D*b*, ita D*b* ad DX, & ita DX ad DF. Sunt ergo rurſus rectæ D*b*, DX Mediæ quæſitæ.

Si quis in hac demonſtratione propoſitionem falſam aut non neceſſariam illationem oſtenderit, modo convitiis ſe abſtineat (etſi mihi meus error placere non poteſt) veritati tamen ſtudens non inique feram. Sed ut eo ſolum nomine accuſer, quod poſtquam ad conſtructionem aſſumpſiſſem mediam proportionalem inter extremas, medietate illa non ſum uſus, iniquum eſt. Dicant velim, illa regula a quo Magiſtro Logicæ profecta eſt, ut cum Magiſtro ipſo controverſia mihi ſit. Sin nullius Magiſtri, ſed ſuæ ipſorum prudentiæ dictamen ſit oſtendant eſſe infallibile. Quod dicant ſine exemplo eſſe, nihil moror; quæram enim viciſſim quis ſuit ille qui alia methodo duplicationem Cubi demonſtravit. Euclides multas habet in initio Elementorum definitiones, quibus tamen nuſquam utitur. An Definitiones ad demonſtrationes minus neceſſariæ ſunt quam Aſſumpta. Analytici omnes aſſun u t aliquid ignotum (etſi ab ignoto per ſe, notum fieri nihil poteſt) ſed ope aliorum præcognitorum Problemata multa aut ſolvunt aut ſolvi non poſſe demonſtrant. An Verum Poſitum minus valebit, quam pro vero ſuppoſitum dubium? Errant qui ſic ſentiunt; Verum enim, tam ſui quam falſi index eſt, ut a quo nihil niſi verum derivatur.

Sed ne quid omittamus quod Problemati nobili perſpicuitatem allaturum videatur, eandem nunc concluſionem ab eo ipſo demonſtrabimus, quod recta AO æqualis ſumpta ſit rectæ DE, id eſt mediæ proportionali inter extremas AD & DV.

Sumatur (in latere DC) recta DF æqualis DV, & deſcribatur quadratum DF*rg*. Erit autem punctum *r* in diagonali DB. Deſcribatur quadratum DX*pq*, & erit punctum *p* in eadem diagonali DB.

L Deſcribatur

Describatur quadratum DE*kl*; cujus etiam punctum *k* erit in eadem diagonali DB. Secet autem *lk* producta latus BC in *n*, & rectam X*p* productam in *u*, & rectam F*r* productam in *s*.

Describatur deniq; quadratum DM*ih*, cujus punctum *i* erit in eadem diagonali DB; cujus quidem latus *h i* productum secet *ln* in *o*, & AB in *t*, latus autem M*i* productum secet BC in *m*.

Ostensum autem est tres rectas DM, DX, DV id est M*i*, *qp*, *gr* esse continuè proportionales, item OM, DV, id est OM, *g*A esse æquales, & proinde (dempta communi *g*M) æquales esse AM, & O*g*, id est *ti*, vel *im*, vel F E, & propterea rectam *g* M æqualem esse EC, vel *kn*, vel *os*.

Quoniam jam *lk* media est proportionalis inter *ln*, & *ls*, erunt tres rectæ *ls*, *lk*, *ln* continuè proportionales. Erunt item *gr*, *qp*, M*i*, id est *ls*, *lu*, *lo* continuè proportionales. Est autem utriusque Analogismi eadem Antecedens *ls*. Quare (per Prop. 28. Elementi decimi quarti) ratio *ln* ad *lo* duplicata erit rationis *lk* ad *lu*. Sed ut *lk* ad *lu*, ita est M*i* ad *lk*.

Ratio ergo *ln* ad *lo* duplicata est rationis *lo* sive M*i* ad *lk*.

Sed ratio quadrati D*hi*M ad quadratum DE*ki* duplicata est rationis M *i* (id est *lo*) ad *lk*.

Si ergo quadratum D*hi*M intelligatur ductum perpendiculariter in suum latus M*i*, item quadratum DE*kl* perpendiculariter in rectam *ln* æqualem lateri AD, fient duo parallelipipeda quorum latera & altitudines reciprocantur. Quare (per Prop. 34. Elementi undecimi) erit cubus a DM (Cubus autem est parallelipipedum) æqualis parallelipipedo cujus basis est æqualis quadrato DE*kl*, altitudo æqualis *ln* sive AD.

Sed quadratum DE*kl* æquale est rectangulo sub AD, DV id est rectangulo MR, parallelipipedum autem sub rectangulo MR ductum in OR æqualem AD, est dimidium Cubi totius a latere AD, id est æquale quatuor Cubis a latere DV. Itaq; recta DM est Mediarum duarum inter AD, DV major, & cætera, Quod erat demonstrandum.

Ostendam jam rectam DO semissem esse Tangentis 30 gradurum. Secet RO rectam E*k* in *y*; eritq; O*y* sinus 45 graduum. Itaq; utraq; rectarum A*y*, D*k* æqualis erit AB, videlicet lateri totius quadrati ABCD. Circulus ergo descriptus Radio DC

transibit per k, & circulus descriptus radio AB transibit per y.

A puncto y erigatur recta $y\alpha$ perpendicularis ipsi Ay, secans BC in α, producaturq; αy ad latus C D in z. Erit ergo triangulum Cαz æquicrurum, & anguli ejus ad α & z semirecti. Producatur gr ut secet arcum Ck in ς, eritque angulus CDς tertia pars recti. Quare producta Dς faciet cum latere CB angulum æqualem duabus tertiis recti.

Quoniam autem angulus R$y\alpha$ est semirectus, & angulus CDc tertia pars recti, faciet Dς producta cum $y\alpha$ angulum anguli recti partem sextam. Sed angulus Rαy qui etiam est semirectus una cum sexta parte recti faciet duas tertias recti. Quare juncta $\alpha\varsigma$ & producta incidet in D, Est ergo Cα Tangens anguli 30 graduum, & huic æqualis Cz. Sed (propter angulum C$y\alpha$ rectum divisum bifariam ab Ry) recta Cα dupla est rectæ CR, id est rectæ DO.

Coroll. 1. Sequitur hinc rectam Cy sive $y\alpha$ sive etiam Bα duplam esse rectæ Og sive FE. Quoniam enim DO, Og simul sumptæ æquales sunt semissi lateris AD, erit dupla DO, id est Cα, una cum dupla Og æqualis radio toti BC. Cum ergo Cα sit dupla DO, erit residua Bα æqualis duplæ Og sive AM sive Bm.

Cor. 2. Jungatur gy producaturq; ad RC in γ. Quoniam ergo Ay dupla est Ag, erit quoq; (propter similitudinem triangulorum Ayg, C$y\gamma$) recta yC dupla Cγ. Itaque Cγ, Bm sunt æquales, & Rγ, quæ est differentia inter CR & Cγ, æqualis differentiæ inter dimidium lateris & Tangentem 30 graduum.

Cor. 3. Dupla ry æqualis est Tangenti 30 graduum, nempe rectæ Cα. Nam Ry, yr sunt æquales.

Cor. 4. Semissis circũferentiæ circuli descripti a gr semiradio æqualis est lateribus ambobus Cuborum quorum unus circumscribitur, alter inscribitur eidem sphæræ in qua maximus circulus est qui describitur radio gr semissi lateris AB; quod sic ostendo. Si in quadratorum eorum quæ cubi bases sunt uno quocunq; ducatur diagonalis, erit quadratum ejus duplum quadrati a latere cubi. Rursus, si in termino alterutro illius diagonalis erigatur perpendicularis æqualis cubi lateri, recta

quæ subtendit diagonalem, & latus illud cubi erectum, poterit triplum cubi latus. Erit autem illa subtendens maxima omnium rectarum quæ intra cubum duci possunt; & per consequens, diameter erit sphæræ cui cubus inscribitur. Nam diameter sphæræ triplum potest lateris Cubi in illa sphæra inscripti.

Centro r radio gr semisse lateris AB, describatur circulus $\nu\zeta g$F, ducaturque $\gamma\tau$ parallela & æqualis CD, secans diagonalem AC in μ. Quoniam ergo γm æqualis est Tangenti Cα, si jungatur μi, erit illa æqualis eidem Cα; cujus quadratum est $\mu i \nu \lambda$. Quoniam ergo latus DC triplum potest rectæ Cα, ut manifestum est (ex eo quod sinus 60 graduum triplum potest semiradii, & est ut sinus 60 graduum ad semiradium, ita radius ad Tangentem 30 graduum erit) cubus cujus quadratum est $\mu i \nu \lambda$ inscriptus in sphæra cujus maximus circulus est $\nu\zeta g$ F. Manifestum autem est cubum cujus unum quadratum est ABCD circumscriptum esse sphæræ eidem $\nu\zeta g$ F, & ostensum est rectam compositam ex latere AB cubi circumscripti, & Cα, id est μi lateri cubi inscripti, æqualem esse arcui quadrantis BD, id est semissi circuli $\nu\zeta g$ F.

Postremò, Eadem hæc comparemus cum numeris; & (quia radix numeri non semper est numerus) quadrata ipsa in numeros convertemus.

Producatur BC in δ, ita ut Bδ possit decem quadrata a recta DV sive DF, jungaturq; Aδ, quæ secabit DC in X; quod sic ostendo.

Quoniam Bδ potest decem quadrata a DV, & AB potest quatuor quadrata ab eadem DV, erit quadratum a Bδ, 10; quorum quadratum ab AB sive DC est 4; sive quorum quadratum a Bδ est 40, eorum quadratum a DC est 16. Est autem ut 40 ad 16, ita 16 ad $6\frac{2}{5}$.

Cumque Dh ostensa sit semissis totius Bδ, poterit Dh decem quadrata a semisse ipsius DV, sive a quarta parte lateris DC.

Quadratum ergo a DC ad quadratum a Dh sive a DM, est ut 16 ad 10.

Rursus, ut 16 ad 10 ita est $6\frac{2}{5}$ ad 4. Sed quadratum a DF

est

est 4, quorum quadratum a DC est 16. Quare latus quadrati 16 est ad latus quadrati 10, ut latus quadrati 6¼ ad latus quadrati 4. Quare rectæ DC, D*h*: latus quadrati 6¼ DF sunt proportionales.

Sed ostensum est esse ut DC ad D*b*, ita DX ad DF. Latus ergo quadrati 6¼ est ipsa DX.

Sequitur hinc, Primò rectam DX esse mediam proportionalem inter DC, & duas quintas ejusdem DC. Quadratum enim a DX, nempe DX*pq*, est duæ quintæ quadrati a DC, quia 3⅕ est quinta pars 16, & 6⅖ duæ quintæ ejusdem quadrati a DC & propterea æquale rectangulo sub DC & duabus quintis ejusdem DC.

Sequitur secundò, Quod ductâ AX & productâ ad occursum BC productæ in ʃ, rectam Bʃ posse 10 quadrata a DF.

Sequitur tertio, rectam DE (quæ est media proportionalis inter DC & DF) mediam quoque esse inter D*h* & DX. Cum enim quadratum a D*h* sit 10, quorum quadratum a DC & 16, & quadratum a DE 8; Si fiat ut 10 ad 8, ita 8 ad tertium erit illud tertium 6⅖. Unde patet etiam hoc, rationem DF ad DE, esse ad rationem DF ad DX ut subtriplicata ad subduplicatam, ut illi loquuntur; ego autem malim dicere, ut tres rationes minoris ad majus, ad duas rationes minoris item ad majus.

Sequitur quartò, rectam Bʃ esse ad DX ut 5 ad 2. Cum enim quadratum a Bʃ sit ad quadratum a DC ut 40 ad 16, id est ut 5 ad 2, & ut quadratum a Bʃ ad quadratum a DC ita ipsa Bʃ (quia quadrata sunt in duplicata ratione laterum) ad DX erit Bʃ ad DX ut 5 ad 2; & quadratum a Bʃ ad quadratum a DF ut 25 ad 2½ id est ut 10 ad 1; & ipsam Bʃ ad DF ut *l.* 10 quadrata ad *l.* 1. Atque hactenus quidem calculi Geometricus & Arithmeticus consentiunt inter se & cum Euclide.

Sunt autem rectæ D*h* (sive DM) DX, DF (sive DV) continuè proportionales, propter semicirculum MXV. Quare etiam earundem quadrata sunt continuè proportionalia. Atqui si reducantur ad numeros, numeri illi proportionales non erunt. Est enim quadratum a D*h*, 10, quorum quadratum a DX est 6⅖, & quadratum a DF, 4. Qui numeri non sunt proportionales

Reducantur enim ad numeros integros (quod fiet multiplicando ſingulos per 5.) Facti autem erunt 50, 32, 20, qui proportionales non ſunt. Sunt enim 50, 32, $20\frac{24}{50}$ continuè proportionales; quorum minimus eſt juſtò major. Continuè item proportionales ſunt DC, D*h*, DX, quibus reſpondent numeri 16, 10, $6\frac{2}{5}$; qui proportionales non ſunt. Nam reducti ad integros fient 80, 50, 32; qui proportionales non ſunt. Proportionales enim ſunt 80, 50, 31 $\frac{1}{4}$, quorum minimus eſt juſtò minor.

Unde autem naſcitur hæc Geometriæ & Arithmeticæ diſſentio? Ab eo quod ſubtendens trianguli rectanguli non ſemper poteſt latera duo, angulo recto adjacentia, cum ſubtendens illa non ſit linea, ſed minutum triangulum; cujus ſi punctum verticale computetur pro nihilo, terminus alter erit trianguli minuti baſis.

Cum enim duæ rectæ BA, BC punctum habeant commune B quantitate carens; ſi ab eodem puncto B ducatur tertia recta faciens angulum quemcunq; cum BA vel BC, illa tertia propior erit utrivis duarum BA, BC, quam altera earum alteri; & propterea habebit tertia illa cum utravis priorum plus quam punctum commune, id eſt communem partem. Quare tres illæ rectæ una eademque erunt recta. Item propter eandem cauſam totum circuli planum erit linea recta. Quod ſatis eſt abſurdum.

Recta ergo ſubtendens pro linea haberi non poteſt, niſi quæ ſit diagonalis quadrati. Illa enim dividit angulum rectum bifariam; id quod non facit diagonalis rectanguli non quadrati. Unde neceſſe eſt numerantibus quadrata, (quia minutiſſimi trianguli baſis quantulacunque ea ſit, quantitas tamen eſt) unam & eandem quantitatem ſæpius numerare.

Si denique cubos ipſos per numeros inveſtigare volumus, impoſſibile volumus; quia quadratum multiplicatum per numerum facit ſemper quadrata, quorum nulla multitudo faciet cubum. Cauſa ergo quare problemata illa, metiendi circulum, duplicandi cubum, dividendi Angulum, dividendi Rationem, & alia multa inventa hactenus non fuerint, nulla

aſſignari

aſſignari poteſt præter has. 1°, quod ad ea invenienda abuſi ſunt Arithmetica. 2°. Quod errores antiquorum, recentiores nimium venerati ſunt. 3°. Quod qui errores illos conati ſunt detegere, eos imperiti homines (ne ſua inſcitia ſimul detegeretur) convitiis abſterruerunt. Quibus tamen omnibus, propter rei difficultatem, & antiquitatis reverentiam, ignoſci poteſt, præterquam ultimis illis, convitiatoribus, non Geometris, ſed inſulſis, indignis, Geometriæ procis.

FINIS.


C
D

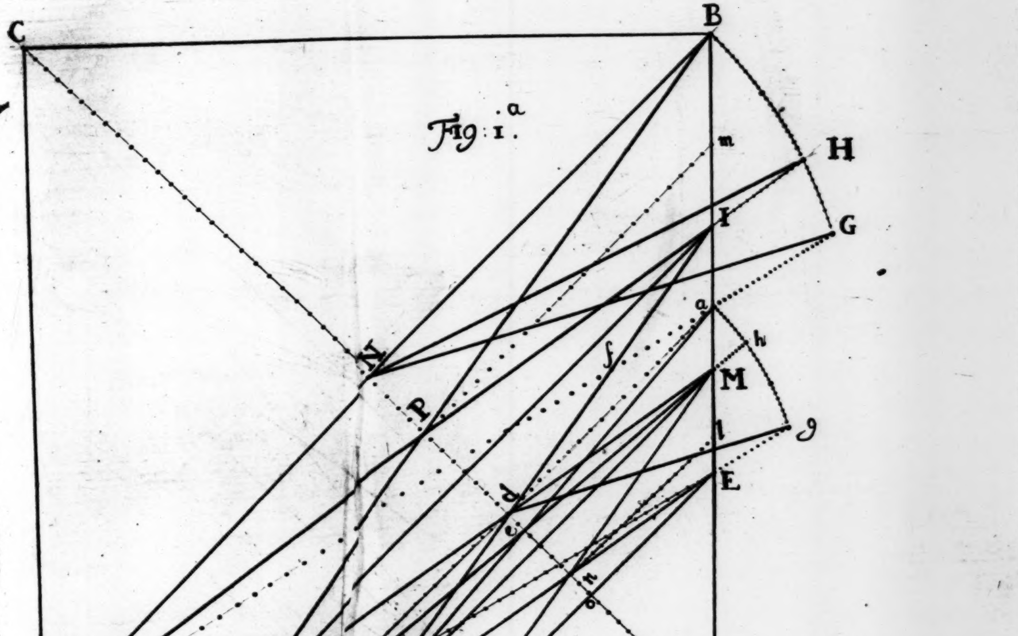


Fig: 1.a
C
B
m
H
I
G
a
h
f
M
P
l
g
E
d
e
n
o
D
K
b
L
F
A
V


C
D

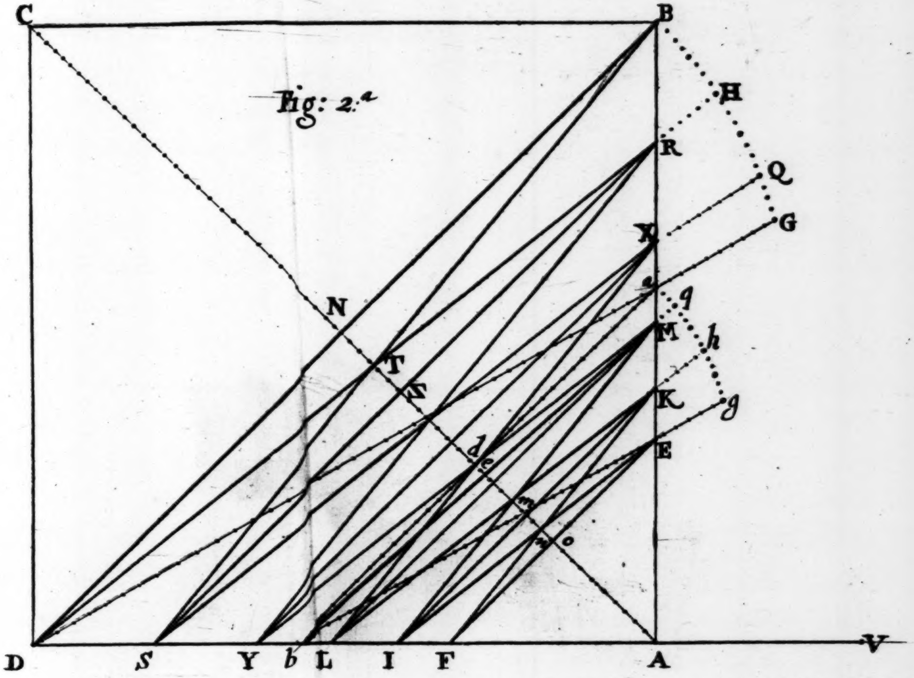


Fig: 2.ª

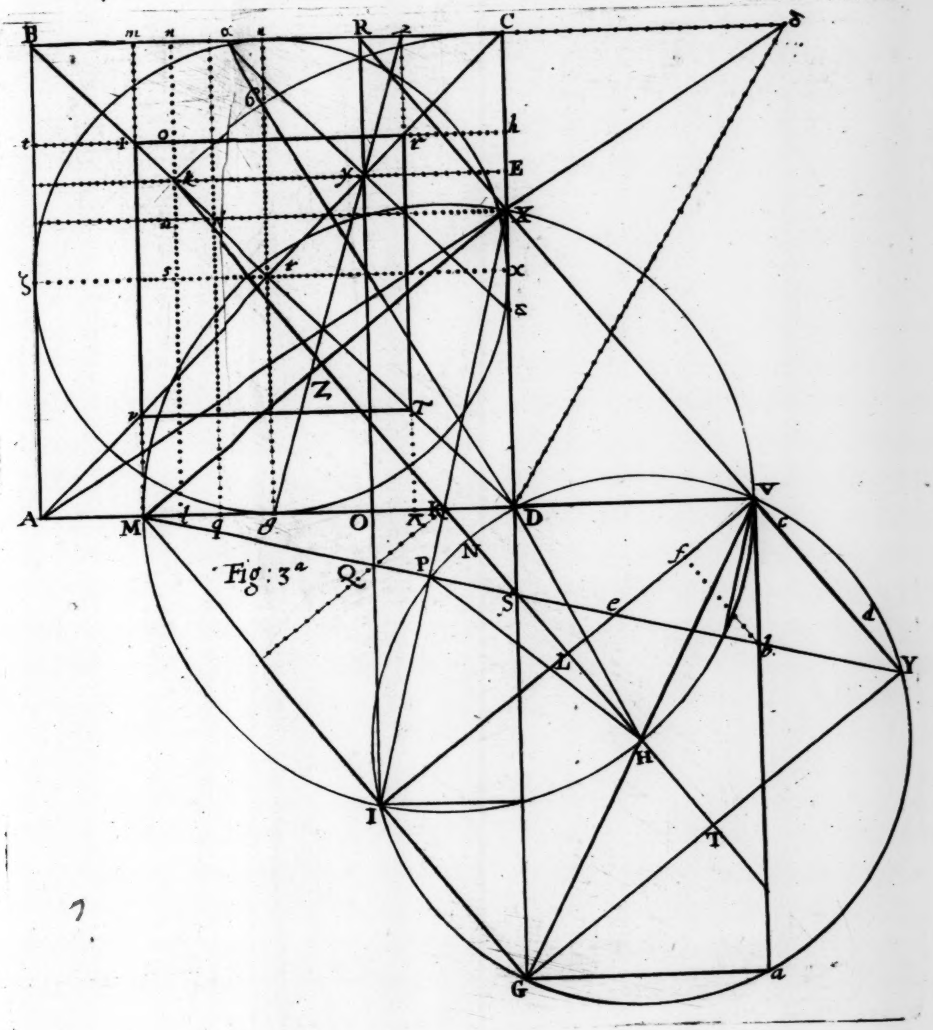


Fig: 3ª